Heikki Lehto • Raimo Havukainen • Jukka Maalampi • Janna Leskinen

FYSIIKKA 5

Pyöriminen ja gravitaatio

Sanoma Pro Oy • Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-0120-4 Fysiikka 5

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1859-2
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1860-8

Toimitus: Juho Niemelä, Sanna Mäkitalo
Typografia: Riitta Piuva
Taitto: MacSet Oy / Tarja Lamberg
Kansi: Heli Ahola, Riitta Piuva
Kannen kuva: iStockphoto
Piirrokset: Picman Oy / Pekka Könönen, Eila Sinivuori,
paitsi Mirja Nuutinen 144, 152, 153
Valokuvat ks. s. 168

© Heikki Lehto, Raimo Havukainen, Jukka Maalampi, Janna Leskinen
ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

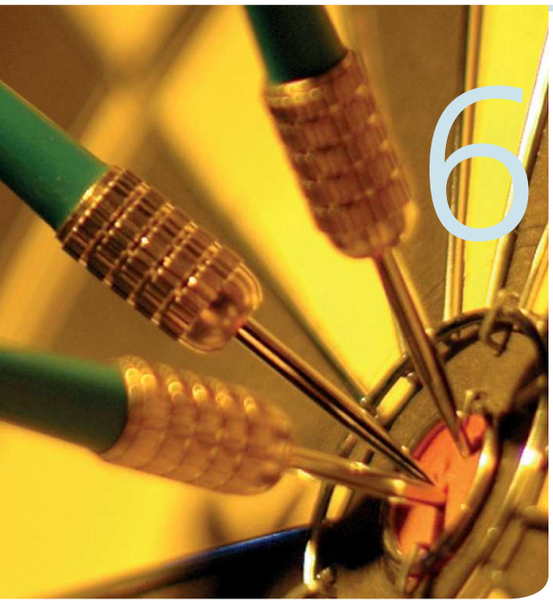
Pyörimisliike 7
Ympärillämme on pyörimisliikettä 8
1.1 Pyörimisen kinematiikka 10
Pyörimisnopeus 11
Kiertokulma 12
1.2 Tasainen pyörimisliike 15
1.3 Muuttuva pyörimisliike 20
Kulmakiihtyvyys 21

Ympyräliike 29
Ympyräliike 30
2.1 Kappale ympyräliikkeessä 31
2.2 Tasainen ympyräliike 33
2.3 Muuttuva ympyräliike 40

Jäykän kappaleen mekaniikka 53
Johdanto statiikkaan 54
3.1 Voiman momentti 55
3.2 Kappaleen painopiste 61
Painopiste 61
Painopisteen laskennallinen määrittäminen 62
Tasapainolajit 65
3.3 Mekaaniset koneet 68
Vipu 68
Kalteva taso 69
Väkipyörä ja talja 70
Vintturi 71
3.4 Jäykän kappaleen tasapaino 73

Pyörimisliikkeen dynamiikka 81
Hitaus pyörimisliikkeessä 82
4.1 Pyörimisliikkeen liikeyhtälö 83
Pyörimisliikkeen energia 88
Hitausmomentin riippuvuus kappaleen koosta ja muodosta 90
Työ pyörimisliikeessä 95
4.2 Pyörimismäärä ja pyörimismäärän säilyminen 99
4.3 Vieriminen 105
Vierivän kappaleen energia 107

Gravitaatio 117
Gravitaatio on perusvaikutus 118
5.1 Keplerin lait 119
5.2 Gravitaatiolaki 121
5.3 Gravitaatiokenttä 124
Mekaaninen energia gravitaatiokentässä 130
Pakonopeudet 132



Heittoliike 139
Heittoliike 140
6.1 Putoaminen ja pystysuora heittoliike 141
Putoaminen 141
Pystysuora heittoliike 143
6.2 Vaakasuora ja vino heittoliike 147
Vaakasuora heittoliike 147
Vino heittoliike 150

Kertaustehtävät 158
Vastauksia 164
Hakemisto 167

Opettajalle ja opiskelijalle

Fysiikka 5 -kirja sisältää lukiofysiikan viidennen kurssin Pyöriminen ja gravitaatio oppiaineksen. Kirjan taustalla on pitkä kehitystyö sekä opettajilta saadut toiveet ja palauteet.

Kirjassa on selkeä ja havainnollinen esitystapa sekä moderni ja rauhallinen ulkoasu, joka houkuttelee tutkimaan kirjaa. Uuteen asiaan tutustutaan teoriatekstien, oppilastöiden ja esimerkkien sekä valokuvien, piirrosten ja kaavioiden avulla. Kirjan rakenne sallii eriyttämisen opettajan asettamien tavoitteiden mukaan.

Fysiikka 5 -kirja käsittelee pyörimiseen liittyviä ilmiöitä, joissa kokeet ja teoria liittyvät läheisesti yhteen. Kirjassa on yksinkertaisin välinein toteutettavia oppilastöitä ja tietokoneavusteisia mittauksia. Tietokoneavusteiset mittaukset on esitelty niin, että työn toteutus käy selville, vaikka koulussa ei olisikaan käytettävissä tietokoneavusteista mittausjärjestelmää.

Fysiikan historian opiskelu auttaa ymmärtämään, miten fysiikan teoriat rakentuvat aikaisemman tiedon pohjalle ja miten ne ovat syntyneet lukuisten eri aikakausina työskennelleiden ihmisten ponnistelujen tuloksena. Tässä kirjassa fysiikan historiallinen tausta otetaan esille asiayhteydessään.

Kirjassa on runsaasti erityyppisiä tehtäviä: ajatuksia herättäviä **pohdi ja etsi** -tehtäviä, **perinteisiä laskutehtäviä**, opiskelijan itsearviointiin tarkoitettuja **testaa, osaatko** -tehtäviä sekä **kertaustehtäviä** kirjan lopussa. Kaikkia tehtäviä ei ole tarkoitus käsitellä oppitunneilla, vaan opiskelijan on hyvä edistää oppimistaan ratkaisemalla tehtäviä myös omatoimisesti. Tehtävien ratkaisut tulee opetella esittämään selkeästi ja perustellusti.

Opetussuunnitelman edellyttämät aihekokonaisuudet, kuten hyvinvointi ja turvallisuus sekä teknologia ja yhteiskunta, ovat kirjassa luontevasti mukana. Tieto- ja viestintätekniikkaan voidaan perehtyä hyvin pohdi ja etsi -tehtävien avulla. Myös työraporttien ja tutkielmien laadintaa on hyvä harjoitella tälläkin kurssilla.

Kirjaan liittyy runsaasti monipuolista oheismateriaalia.

Jatko-opintoja ajatellen fysiikan opiskelu lukiossa on tärkeää. Monet jatko-opiskelumahdollisuudet luonnontieteiden, lääketieteen, tekniikan, koulutuksen, tutkimuksen ja usein myös liike-elämän aloilla edellyttävät fysiikan opintoja jatkossa.

Menestystä fysiikan opiskeluun!

Syyskuussa 2010

Heikki Lehto, Raimo Havukainen,
Jukka Maalampi ja Janna Leskinen

Johdantotehtäviä

1. Mainitse a) pyörivä b) vierivä c) paikallaan oleva kappale.

2. a) Mitä pesukoneen ohjeissa oleva merkintä 1200 rpm tarkoittaa?
b) Miten pyykin vesipitoisuus muuttuu pesukoneen pesuohjelman linkousvaiheessa?

3. Pyörität narun päässä olevaa palloa vaakatasossa. Lanka katkeaa. Mihin suuntaan pallo lähtee langan katkeamisen jälkeen?

4. a) Käännät mutteria jakoavaimella. Miksi vääntäminen on helpompaa, kun pidät kiinni avaimen päästä?
b) Miksi pihdeissä ja oksasaksissa on pitkän varret?

5. Keinulauta on tuettu keskeltä. Lapsi, jonka massa on 30 kg, istuu 2 m:n päässä keskikohdasta. Kuinka kauas keinulaudan toiseen päähän massaltaan 60 kg henkilön on asetuttava, jotta lauta asettuisi tasapainoon?

6. a) Miten taitoluistelija nopeuttaa pyörimistään piruetissa?
b) Mainitse muita urheilulajeja, joissa urheilija muuttaa pyörimisnopeuttaan kuten taitoluistelija.

7. Kumpi on helpompi saada pyörimään, samankokoinen ontto vai umpinainen pallo?

8. a) Onko maapallo täysin pyöreä?
b) Näytä kädelläsi maapallon pyörimissuunta.

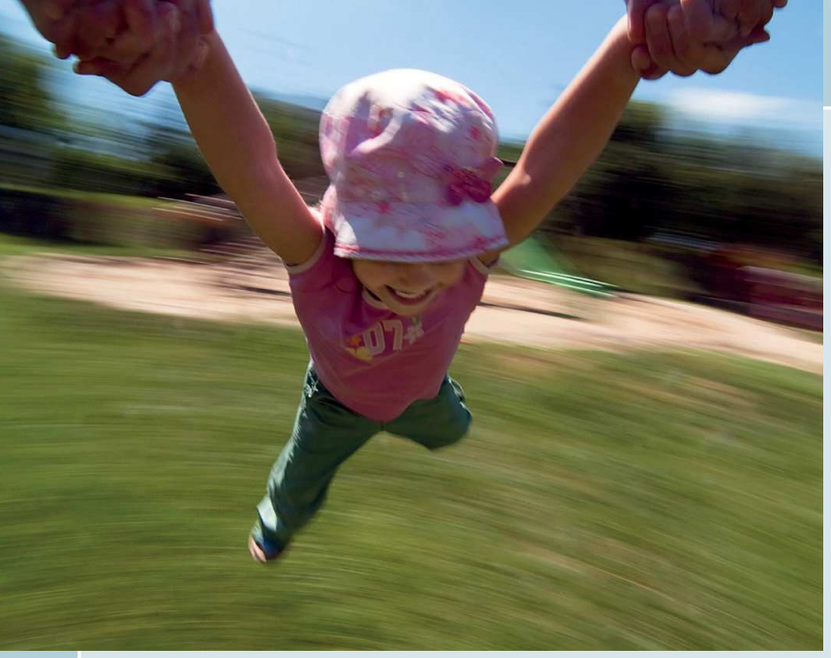
9. a) Miksi tietoliikennesatelliitti voi pysyä koko ajan saman paikan yläpuolella?
b) Missä tällainen paikka sijaitsee?

10. Heität pallon kohtisuoraan ylöspäin. Kuinka suuri on pallon nopeus, kun pallo on korkeimmassa kohdassaan?

1 Pyörimisliike

Tässä luvussa opit
- **tasaisen ja muuttuvan pyörimisliikkeen.**

Keskeisiä käsitteitä ovat
- **pyörimisnopeus**
- **kiertokulma ja kiertymä**
- **kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys**
- **jäykkä kappale.**



Ympärillämme on pyörimisliikettä

Pyöriminen liittyy elämäämme monin tavoin. Kotona esimerkiksi DVD-levy, mikroaaltouunin alusta, sähkövatkaimen koukut ja tuuletin ovat akselinsa ympäri pyöriviä kappaleita. Myös dreija (keraamikon työväline), karuselli, moottorien rattaat ja tuulimyllyn siivet pyörivät usein paikallaan olevan akselinsa ympäri.

Kaikki taivaankappaleet näyttävät olevan pyörivässä liikkeessä. Maa pyörii oman akselinsa ympäri hieman hidastuen, ja Maa–Kuu-systeemi pyörii yhteisen painopisteensä ympäri ja samalla kiertää kerran vuodessa Auringon ympäri. Aurinko pyörii oman akselinsa ympäri, ja samoin pyörivät kaikki planeetat. Myös Aurinko liikkuu ympyräradalla, sillä Linnunratakin pyörii keskustansa ympäri – ja aurinkokunta ja me pyörimme siinä mukana. Lisäksi koko Linnunrata liikkuu paikallisen galaksijoukon mukana.

Kappale voi pyöriä ja samalla edetä, kuten polkupyöränrengas: tällöin kappale **vierii**. Kappale vierii pitkin alustaa, jos se etenee pyörimällä luistamatta alustan suhteen.

Pitsaleikkurissa yhdistyy pyörimis- ja etenemisliike.

Vauhdikasta pyörimisliikettä Rion sambakarnevaaleilla.

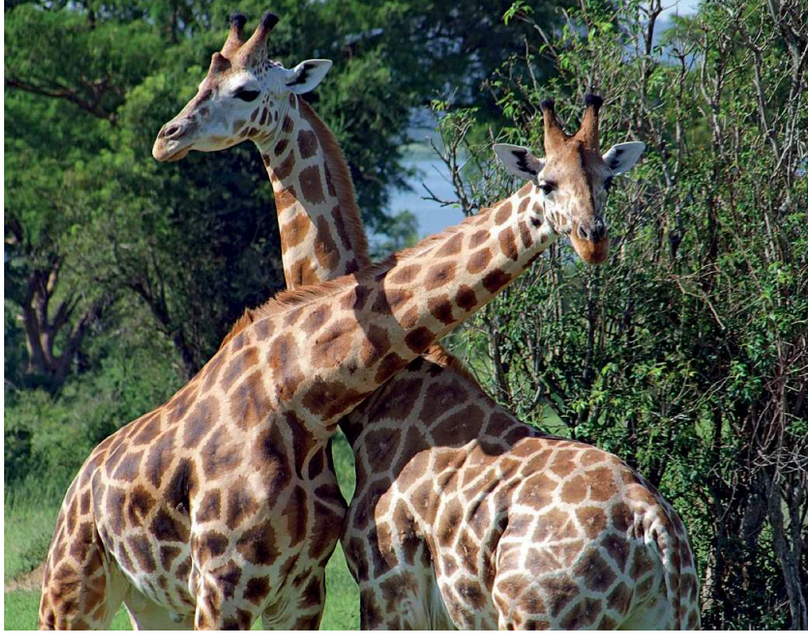
Levossa oleva kappale saadaan etenevään liikkeeseen kohdistamalla siihen voima. Pyörimisliikkeeseen kappale saadaan puolestaan kohdistamalla siihen **momentti.** Momentti aiheuttaa pyörimisliikkeen kiihtyvyyden. Kappaleen pyörimiseen liittyvää liikkeen energiaa kutsutaan **pyörimisenergiaksi**. Kun momentti lakkaa vaikuttamasta, kappale jatkaa pyörimistään liikkeen jatkavuuden periaatteen mukaisesti. Pyöriminen kuitenkin hidastuu, koska kappaleen pyörimisenergiaa kuluu liikevastusten voittamiseen, ja lopulta pyöriminen lakkaa.

Energiantuotannossa energia muunnetaan usein muodosta toiseen pyörivien rakenteiden avulla. Tuulivoimalaitoksissa ilman liike-energia muuntuu siivekkeiden ja akselin pyörimisen energiaksi, jonka generaattori muuntaa sähköksi. Generaattorinkin toiminta perustuu pyörimiseen.

Auton polttomoottorissa mäntä liikkuu edestakaisin, ylös ja alas, mutta kampiakselin välityksellä liike muutetaan pyörimisliikkeeksi. Kytkimen ja vaihteiston välityksellä auton renkaat saadaan pyörimään.

Pyörimisenergiaa käytetään hyväksi erilaisissa koneissa, joissa vauhtipyörä varastoi energiaa ja luovuttaa sitä niiden vaiheiden aikana, joina kone ei sitä tuota. Tällä tavalla vauhtipyörä tasoittaa koneen käyntiä.

Majakassa on usein pyörivä valonlähde, joka lähettää merkkivaloa merellä liikkujille. Suomessa majakat erotetaan toisistaan mm. peräkkäisten valonvälähdysten lukumäärän, valon värin ja sektorisuunnan mukaan.



Kirahvi ei ole jäykkä kappale, koska sen muoto muuttuu sen liikkuessa ja liikehtiessä. Jäykän kappaleen asento ja paikka voivat vaihtua toiseksi, mutta kappaleen muoto ei muutu.

1.1 Pyörimisen kinematiikka

Pyörimisliike on yksi liikkeen perustyyppi. Kaikki liike, jossa kappaleen **asento muuttuu**, on **pyörimistä**. Kappale pyörii aina jonkin akselin, **pyörimisakselin**, ympäri. Tuulimyllyn siivet pyörivät niihin kiinnitetyn akselin ympäri. Tällaista liikettä kutsutaan **pyörimisliikkeeksi**. Pyörimisakseli voi olla muuallakin kuin keskellä ympyrän muotoista kappaletta: esimerkiksi modernissa tanssissa tanssijan pyörimisakseli voi olla hänen vartalonsa ulkopuolella.

Kappale on pyörimisliikkeessä, vaikka se ei kiertäisikään koko kierrosta pyörimisakselinsa ympäri. Esimerkiksi saranoiden varassa kääntyvät ovet ovat niitä avattaessa ja suljettaessa pyörimisliikkessä.

Kappale on **jäykkä**, jos sen koko tai muoto ei muutu sen asennon muuttuessa. Esimerkiksi puinen levy tai polkupyörän vanne ovat jäykkiä kappaleita. Oppikirja ei ole jäykkä kappale, koska esimerkiksi kirjaa avattaessa ja suljettaessa sen muoto muuttuu. Tällä kurssilla tutustutaan jäykän kappaleen pyörimiseen, jossa pyörimisakseli on useimmiten kappaleen keskipisteessä.

Pyörimisnopeus

Oppilastyö ▪ Pyöriminen
Laita polkupyöränrengas pyörimään. Tarkkaile venttiilin liikettä ja mittaa kymmeneen pyörähdykseen kuluva aika.

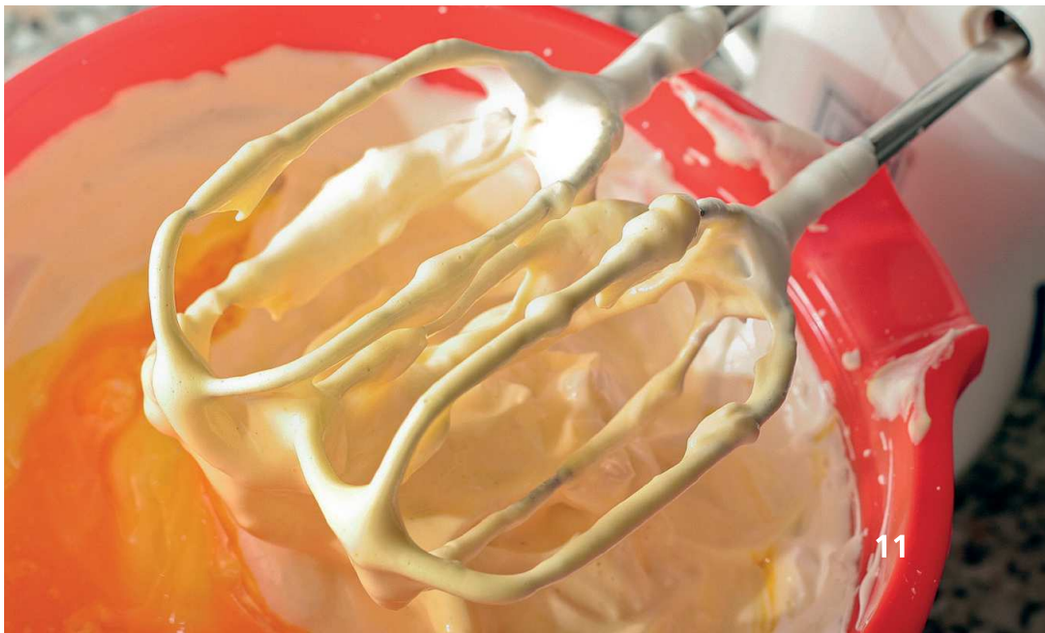
Pyörimisen nopeutta pyörimisakselin suhteen kuvataan ilmoittamalla kierrosten lukumäärä tietyssä ajassa. Tätä suuretta nimitetään **pyörimisnopeudeksi** (kierrostaajuudeksi).

Pyörimisnopeus
Pyörimisnopeus ilmoittaa, kuinka monta kierrosta kappale pyörii aikayksikössä.

$$\text{pyörimisnopeus } n = \frac{\text{kierrosten lukumäärä}}{\text{kierroksiin kulunut aika}}$$

Jos yhteen kierrokseen kulunut aika eli kierrosaika on T, pyörimisnopeus on $n = \frac{1}{T}$.

Pyörimisnopeuden yksikkö on $[n] = 1\,\frac{1}{\text{s}}$. Pyörimisnopeudelle käytetään myös yksikköä $[n] = 1\,\frac{\text{r}}{\text{s}}$, jossa r tarkoittaa kierrosta (revolution). Yksikkötarkastelussa kirjainta r merkitään usein luvulla 1. Moottorien pyörimisnopeudet ilmoitetaan yleensä kierrosten määränä minuutissa. Tällöin $[n] = 1\,\frac{\text{r}}{\text{min}} = 1\,\text{rpm}$ (revolution per minute).



Sähkövatkaimen koukkujen pyörimisnopeus voi olla 1300 rpm.

Esimerkki 1

Turkkilaiset dervissit tanssivat pyörien paikallaan 20–30 kierrosta minuutissa. Seremonian aikana pyöriminen saattaa kestää useita kymmeniä minuutteja.

Oppilastyössä polkupyöränrenkaan kymmeneen pyörähdykseen kului 14 s.
a) Laske renkaan pyörimisnopeus ja kierrosaika.
b) Kuinka pitkän matkan rengas olisi kulkenut, jos se olisi vierinyt maanpintaa pitkin? Renkaan säde on 0,33 m.

$t = 14\ \text{s}, \quad r = 0{,}33\ \text{m}$

a) Renkaan pyörimisnopeus on $n = \dfrac{10\ \text{r}}{14\ \text{s}} \approx 0{,}71\,\dfrac{\text{r}}{\text{s}}\left(= 0{,}71\,\dfrac{1}{\text{s}}\right)$ ja kierrosaika $T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\frac{10}{14}\,\frac{1}{\text{s}}} = \dfrac{14}{10}\ \text{s} = 1{,}4\ \text{s}.$

Renkaan pyörimisnopeus on $0{,}71\,\dfrac{\text{r}}{\text{s}}$ ja kierrosaika 1,4 s.

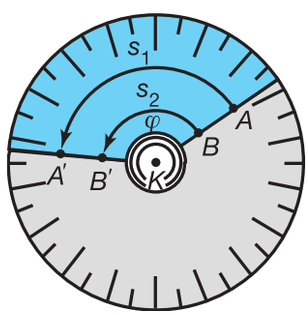
b) Jos rengas olisi vierinyt maanpintaa pitkin, se olisi joka kierroksella edennyt renkaan kehän $2\pi r$ pituisen matkan. Kymmenen pyörähdyksen aikana kuljettu matka olisi ollut

$$s = 10 \cdot 2\pi r = 10 \cdot 2\pi \cdot 0{,}33\ \text{m} \approx 21\ \text{m}.$$

Rengas olisi vierinyt 21 m.

Kiertokulma

Kun levy pyörii sen keskipisteen kautta kulkevan akselin ympäri, levyn jokainen piste kiertää ympyrärataa. Kaukana pyörimisakselista olevat pisteet kulkevat pitemmän matkan kuin lähellä olevat. Jokainen piste kiertyy kuitenkin aina saman kulman samassa ajassa.



$\sphericalangle AKA' = \sphericalangle BKB' = \varphi$
$s_1 > s_2$

Pyörimisliikkeen kiertokulma φ vastaa suureena etenevän liikkeen paikkaa x.

Kappaleen, kuten polkupyörän vanteen, kiertymisen suuruutta pyörimisliikkeessä kuvaa suure **kiertokulma** φ (fii). Kiertokulman muutosta $\Delta\varphi$ nimitetään **kiertymäksi**.

Rengas on ympyräliikkeessä.

Kiertokulma

Kiertokulma φ määritellään kaaren pituuden s ja säteen r suhteena: $\varphi = \frac{s}{r}$.

Kiertokulman arvo on reaaliluku ilman yksikköä, koska yhtälössä $\varphi = \frac{s}{r}$ pituuden yksiköt supistuvat. Kiertokulman yksiköksi on sovittu **radiaani**, 1 rad. Laskuissa radiaania ei oteta yksikkötarkasteluissa huomioon ja yksikkö rad voidaan siis jättää kirjoittamatta. Kun etäisyydellä r pyörimisakselista oleva piste liikkuu matkan $s = r$, kappaleen kiertokulman muutos on 1 rad.

Yhden kierroksen kiertokulma on $\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$, joten täysi kierros on $360° = 2\pi$ rad.

Kiertokulman yksikkö on $[\varphi] = \frac{[s]}{[r]} = \frac{1\text{ m}}{1\text{ m}} = 1\text{ rad}$.

Kiertokulman yksiköiden vastaavuudet

$$1 \text{ kierros} = 360° = 2\pi \text{ rad} \approx 6{,}28 \text{ rad}$$

$$1° = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \approx 0{,}0175 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} \approx 57{,}3°$$

Kun pyörimisen suunta on vastapäivään, sopimuksen mukaan kiertokulman muutos on positiivinen, ja kun suunta on myötäpäivään, muutos on negatiivinen. Huomaa, että pyörimisen suunta riippuu katselusuunnasta: nyt suunnat tarkoittavat kiertosuuntia katselijan suhteen.

Talouspaperirullan pyöriessä ulkokerroksen paperi liikkuu pitemmän matkan kuin sisempänä oleva paperi. Jokainen rullan piste kuitenkin pyörii yhtä suuren kiertokulman.

Esimerkki 2

Ilmoita
a) kulma $1080°$ käyttäen yksikköä radiaani
b) kulma 3,70 rad käyttäen yksikköä aste
c) 57,6 kierrosta käyttäen yksikköä radiaani.

a) Muunnos asteista radiaaneiksi:

$$1080° = 1080 \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = 6\pi \text{ rad}.$$

b) Muunnos radiaaneista asteiksi:

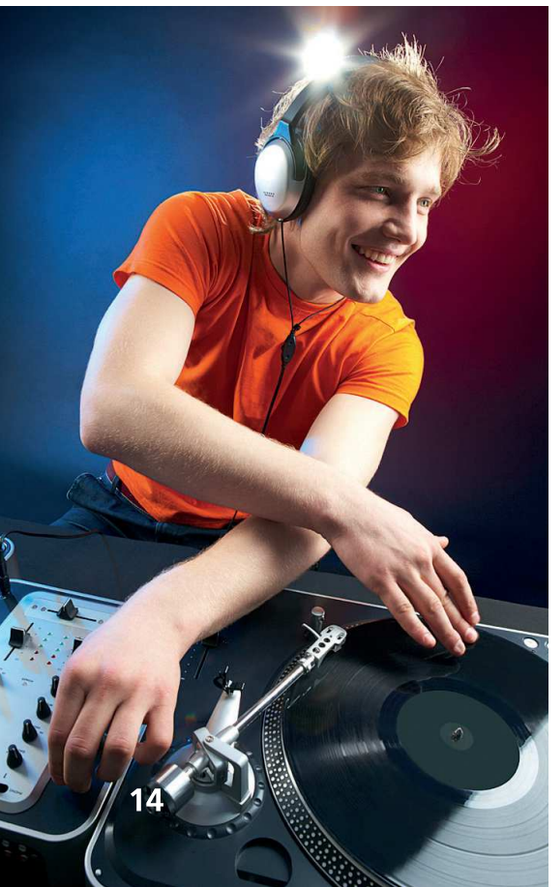
$$3{,}70 \text{ rad} = 3{,}70 \cdot \frac{360°}{2\pi} \approx 212°.$$

c) Muunnos radiaaneiksi:

$$57{,}6 \text{ r} = 57{,}6 \cdot 2\pi \text{ rad} \approx 362 \text{ rad}.$$

Esimerkki 3

Polkupyöränrengas pyörii siten, että venttiilin ja renkaan akselin välinen säde kääntyy $90°$. Laske kiertokulma.



Tapa 1: Kiertokulma on $\varphi = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r/4}{r} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$

Tapa 2: Kulma $90°$ vastaa neljäsosaa koko kierroksesta, joten kiertokulma on $\varphi = \frac{2\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$

Tapa 3: Kiertokulma on $\varphi = 90 \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$

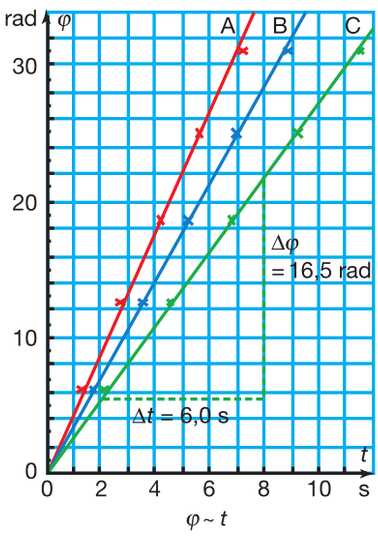
Kiertokulma on $\frac{\pi}{2}$ rad.

Dj pystyy muuttamaan levyn pyörimisen suunnan negatiivisesta positiiviseksi. Pyörimissuunta vastapäivään on sovittu positiiviseksi suunnaksi.

1.2 Tasainen pyörimisliike

Oppilastyö ▪ Tasainen pyörimisliike

Kiinnitä rakolevy laakeroituun akseliin ja akseli statiiviin. Kiinnitä rakolevyn reunaan tarra. Pyöräytä levy pyörimään. Mittaa aika, joka kuluu, kun levy pyörii 1, 2, …, 5 kierrosta. Toista mittaus kaksi kertaa pyörittäen levyä erilaisilla nopeuksilla. Esitä mittaustulokset (t, φ)-koordinaatistossa.



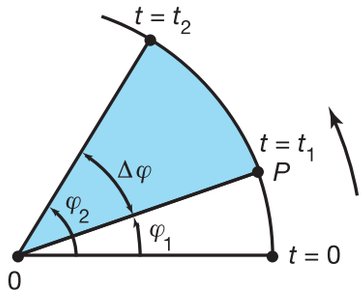
Pyörimisliikkeen kulmanopeus ω vastaa etenevän liikkeen nopeutta v.

Oppilastyön mittaustulokset taulukoitiin.

Pyörähdysten määrä / kpl	Aika t_A/s	Aika t_B/s	Aika t_C/s	Kiertokulma φ/rad
1	1,3	1,7	2,1	$2\pi \approx 6{,}3$
2	2,7	3,5	4,5	$4\pi \approx 12{,}6$
3	4,2	5,2	6,8	$6\pi \approx 18{,}8$
4	5,6	7,0	9,2	$8\pi \approx 25{,}1$
5	7,1	8,9	11,5	$10\pi \approx 31{,}4$

Kun mittaustulokset siirretään (t, φ)-koordinaatistoon, eri mittauksia A, B ja C vastaavat pisteet asettuvat mittaustarkkuuden rajoissa kukin omalle suoralleen: näin ollen on voimassa $\varphi \sim t$.

Kiertokulman keskimääräinen muutosnopeus $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ on (t, φ)-koordinaatistoon piirretyn suoran fysikaalinen kulmakerroin. Kiertokulman muutosnopeutta sanotaan **kulmanopeudeksi** ω.



Keskikulmanopeus

Keskikulmanopeus on

$$\omega_k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1},$$

jossa φ_1 ja φ_2 ovat kappaleen kiertokulmat hetkinä t_1 ja t_2. Kulmanopeus kertoo kappaleen asennon muuttumisnopeuden.

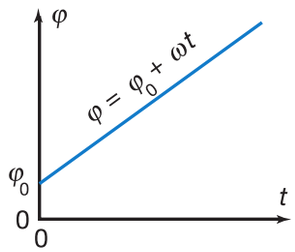
Kulmanopeuden yksikkö on $[\omega] = \dfrac{[\Delta\varphi]}{[\Delta t]} = \dfrac{1\text{ rad}}{1\text{ s}} = 1\text{ rad/s}.$

Kun oppilastyössä levyn pyörimisnopeus oli pienin, keskikulmanopeudeksi saatiin

$$\omega_k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{22\ \text{rad} - 5{,}5\ \text{rad}}{8{,}0\ \text{s} - 2{,}0\ \text{s}}$$

$$= \frac{16{,}5\ \text{rad}}{6{,}0\ \text{s}} \approx 2{,}8\ \text{rad/s}.$$

Oppilastyössä kiertokulman muutos mittaustarkkuuden rajoissa yhtä pitkinä aikaväleinä on aina yhtä suuri, joten pyörivän rakolevyn kulmanopeus on vakio. Tällaista pyörimisliikettä sanotaan **tasaiseksi pyörimisliikkeeksi**.



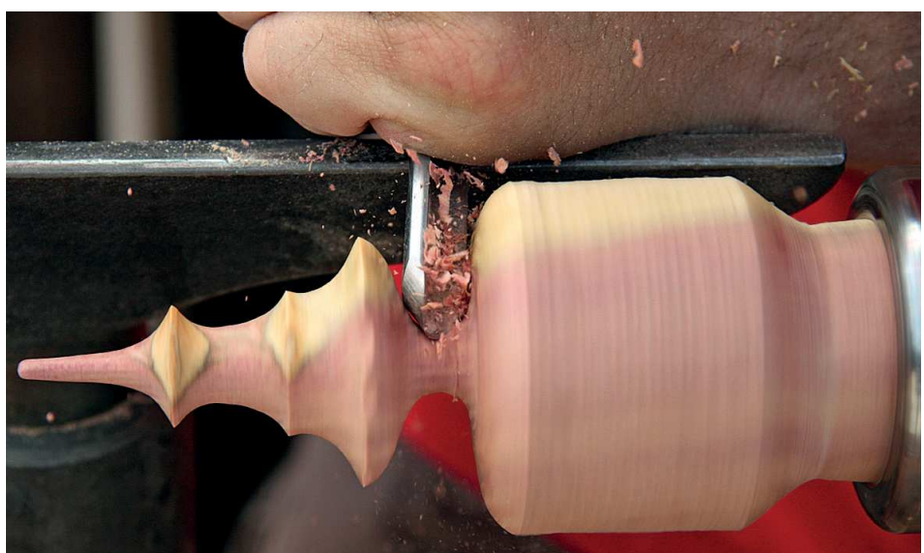
Tasainen pyörimisliike
Tasaisessa pyörimisliikkeessä kulmanopeus ω on vakio. Jos alkuhetkellä $t = 0$ s kappaleen kiertokulma on φ_0, kiertokulma ajan t kuluttua on $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

Koska pyörimisnopeus n voidaan esittää muodossa

$$n = \frac{\frac{\Delta\varphi}{2\pi}}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi\Delta t} = \frac{\omega\Delta t}{2\pi\Delta t} = \frac{\omega}{2\pi},$$

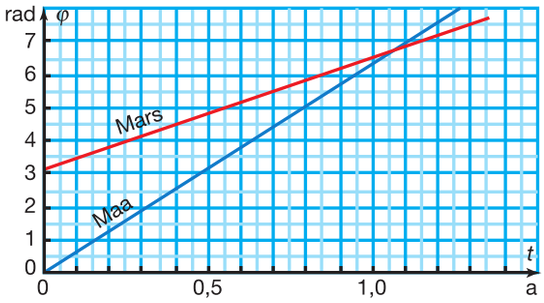
kulmanopeus ω voidaan laskea myös pyörimisnopeuden avulla.

Kulmanopeus ja pyörimisnopeus
Kulmanopeus ω on pyörimisnopeuden n avulla esitettynä, $\omega = 2\pi n$.

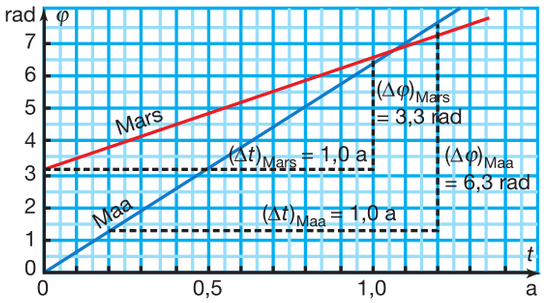


Sorvilla saadaan puuhun kauniita kuvioita ja uurteita. Muotoiltava puukappale kiinnitetään keskiakselistaan sorvin istukkaan. Puukappale on tasaisessa pyörimisliikkeessä, ja siihen tehdään uria terän avulla.

Esimerkki 4



Kuvaaja esittää Maan ja Marsin kiertokulmaa niiden kiertäessä Auringon ympäri. Tarkastelun alkuhetkellä $t_1 = 0$ s Maan kiertokulma on 0 rad ja Marsin kiertokulma π rad. Maa ja Mars ovat silloin Auringon vastakkaisilla puolilla.
a) Määritä kuvan perusteella Maan ja Marsin kulmanopeudet käyttäen yksikköä radiaania vuodessa (rad/a).
b) Mitä kuvassa olevien suorien leikkauspiste kuvaa?



a) Maan ja Marsin kulmanopeudet saadaan suorien fysikaalisista kulmakertoimista.

Maan kulmanopeus on

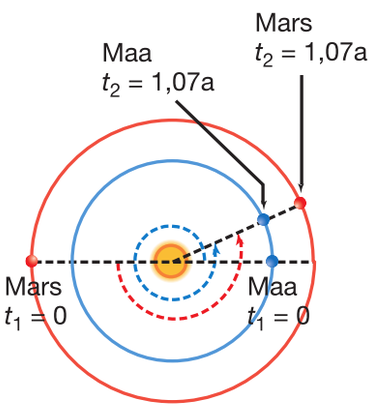
$$\omega_{\text{Maa}} = \frac{(\Delta\varphi)_{\text{Maa}}}{(\Delta t)_{\text{Maa}}} = \frac{7{,}5\text{ rad} - 1{,}2\text{ rad}}{1{,}2\text{ a} - 0{,}2\text{ a}}$$

$$= \frac{6{,}3\text{ rad}}{1{,}0\text{ a}} = 6{,}3\text{ rad/a}$$

ja Marsin

$$\omega_{\text{Mars}} = \frac{(\Delta\varphi)_{\text{Mars}}}{(\Delta t)_{\text{Mars}}} = \frac{6{,}4\text{ rad} - 3{,}1\text{ rad}}{1{,}0\text{ a} - 0{,}0\text{ a}}$$

$$= \frac{3{,}3\text{ rad}}{1{,}0\text{ a}} = 3{,}3\text{ rad/a}.$$



Maan kulmanopeus on 6,3 rad/a ja Marsin 3,3 rad/a.

b) Suorien leikkauspiste (1,07 a; 6,7 rad) kuvaa hetkeä, jolloin Maa ja Mars ovat samalla linjalla Auringon suhteen ja samalla puolella Aurinkoa. Aikaa on kulunut 1,07 vuotta tarkastelun alkuhetkestä lukien, ja Maa on kiertänyt 6,7 rad kiertokulman eli $\dfrac{6{,}7\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}} \approx 1{,}1$ kierrosta. Samassa ajassa Marsin kiertymä on 6,7 rad − 3,1 rad = 3,6 rad.

Esimerkki 5

Hammaslääkärin poran terän pyörimisnopeus on 14 000 rpm. Laske terän a) kulmanopeus b) kiertokulma 8,0 s:n aikana.

$n = 14\,000$ r/min, $\quad \Delta t = 8{,}0$ s

a) Poran terän kulmanopeus on

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 14\,000 \text{ r/min} = \frac{2\pi \cdot 14\,000 \text{ rad}}{60 \text{ s}}$$

$$= 1466{,}1 \text{ rad/s} \approx 1500 \text{ rad/s}.$$

b) Kiertokulma 8,0 s:n aikana on

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = 1466{,}1 \text{ rad/s} \cdot 8{,}0 \text{ s} \approx 12\,000 \text{ rad}.$$

Kulmanopeus on 1500 rad/s ja kiertokulma 12 000 rad.

Tehtäviä

1-1. Polkupyöränrengas pyörii viisi täyttä kierrosta akselinsa ympäri. Kuinka monta astetta renkaan pinna kiertyy? Ilmoita kiertokulma myös radiaaneina.

1-2. Täydennä seuraava taulukko. Kulmaa vastaavan kaaren s säde on 0,10 m.

Kulma asteina θ/°	Kulma radiaaneina φ/rad	Kierroksien lukumäärä / r	Kaaren pituus s/m
30			
	1,0		
		3,5	
			2,0

1-3. Moottorin arvokilvessä mainitaan moottorin akselin maksimipyörimisnopeudeksi 12 500 rpm. Kuinka monta kierrosta sekunnissa moottorin akseli pyörii maksimipyörimisnopeudellaan?

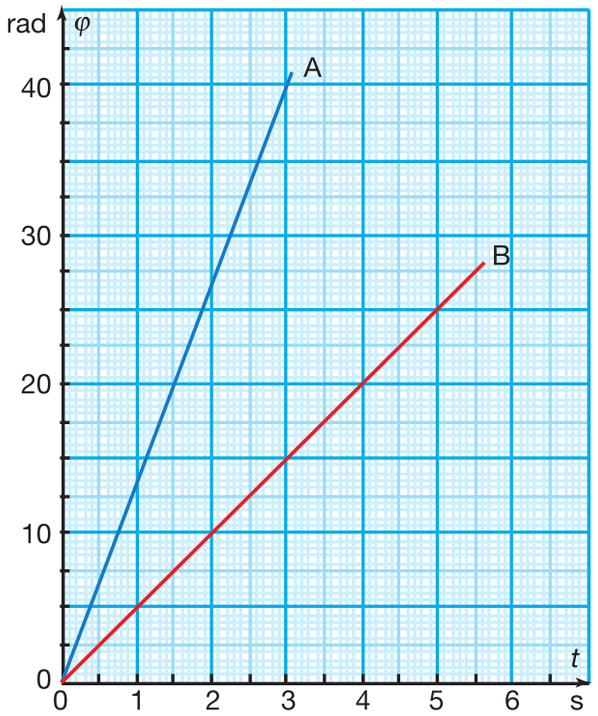
1-4. Pystysuorassa oleva 15 m korkea kuusi kaadetaan joulukuuseksi. Kuinka pitkän matkan kuusen a) latva b) keskikohta liikkuu, kun kuusi kaadetaan vaakasuoralle pihalle? Oletetaan, että kuusi on jäykkä kappale.

1-5. Keittolautanen on keskellä mikroaaltouunin alustaa ja pyörii keskimäärin yhden kierroksen 10,8 sekunnissa. Mikä on lautasen a) pyörimisnopeus b) kiertokulma 2,0 minuutin lämmityksen aikana?

1-6. Tuulimyllyn roottorin siiven pituus on 13 m. Oppilaat mittasivat siiven kymmeneen pyörähdykseen kuluvaksi ajaksi 11,1 s. Laske siiven pyörimisnopeus ja kierrosaika.

1-7. Vanteessa olevan mittarin mukaan venttiilin kiertokulma on 17,0 sekunnin aikana 2250 rad.
a) Kuinka monta täyttä kierrosta venttiili on kiertänyt?
b) Laske venttiilin pyörimisnopeus.

1-8. Kuvassa on esitetty levyjen A ja B pyöriminen (t, φ)-koordinaatistossa.
a) Kumman levyn kulmanopeus on suurempi? Määritä ko. kulmanopeus.
b) Kuinka kauan levyiltä A ja B kestää pyöriä kolme täyttä kierrosta?



1-9. Pyörivän rakolevyn kiertokulma mitattiin viitenä eri hetkenä. Tulokset ovat taulukossa.

φ/rad	0,0	2,5	5,0	7,5	10,0
t/s	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0

Määritä levyn keskikulmanopeus.

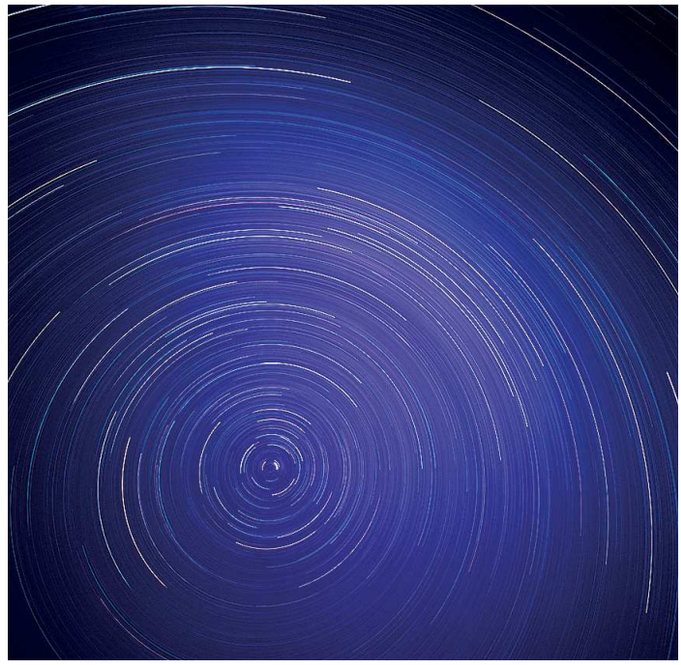
1-10. Tasaisesti pyörivän karusellin kierrosaika on 7,0 s. Laske karusellin
a) pyörimisnopeus b) kulmanopeus.

1-11. Sähkövatkaimen kierrostaajuutta muutetaan arvosta 900 r/min arvoon 3000 r/min. Miten muuttuu vatkaimen koukkujen
a) kierrosaika b) kulmanopeus?

1-12. Millä a) pyörimisnopeudella b) kulmanopeudella päiväntasaajalla seisova henkilö kiertää Maan akselin ympäri?

1-13. Linkouksen aikana pesukoneen rummun pyörimisnopeus on valmistajan ilmoituksen mukaan 1200 kierrosta minuutissa. Linkousvaihe kestää 55 sekuntia. Laske rummun kiertokulma linkouksen aikana.

1-14. Laboratoriossa testattiin polkupyörän vanteen pyörimistä. Vanteen kulmanopeus oli tutkimuksen aikana vakio, 12 rad/s. Mittaaminen aloitettiin, kun vanteen kiertokulma oli 5,0 rad, ja lopetettiin, kun kiertokulma oli 140 rad. Kuinka kauan mittaus kesti?

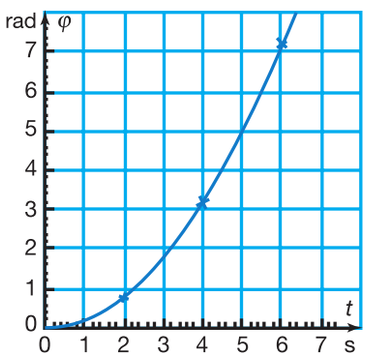


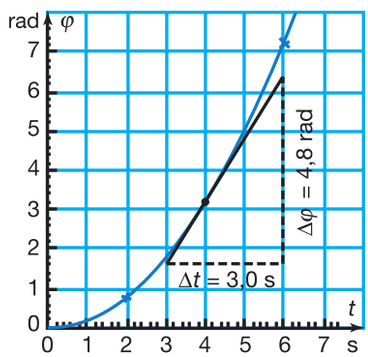
Kuvassa on aikavalotuksella otettu valokuva Pohjantähdestä. Arvioi kuvan perusteella kameran sulkimen valotusaika.

1.3 Muuttuva pyörimisliike

Oppilastyö ▪ Kiihtyvä pyörimisliike
Kiinnitä ympyrän muotoinen kiekko statiiviin. Kierrä kiekon kehälle lankaa ja kiinnitä lankaan punnus. Vapauta punnus ja tarkkaile levyn pyörimistä. Tutki tietokoneelta saatuja (t, φ)- ja (t, ω)-kuvaajia. Toista koe käyttämällä raskaampaa punnusta.

Koska oppilastyössä saatu kuvaaja ei ole (t, φ)-koordinaatistossa suora, levyn todetaan joutuneen kiihtyvään pyörimisliikkeeseen. Levyn kulmanopeus siis muuttuu ajan funktiona; levyn keskikulmanopeus ja hetkellinen kulmanopeus saadaan (t, φ)-koordinaatiston kuvaajasta.





Levyn keskikulmanopeus aikavälillä 1,0 s … 5,0 s on

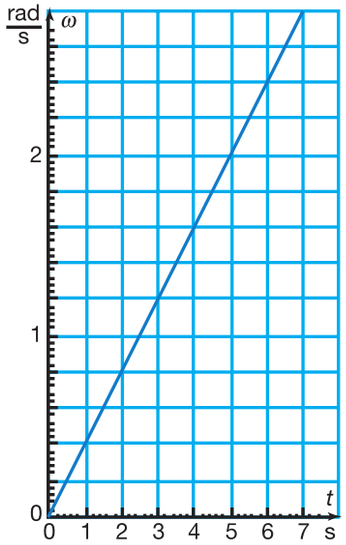
$$\omega_k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{5{,}0\ \text{rad} - 0{,}2\ \text{rad}}{5{,}0\ \text{s} - 1{,}0\ \text{s}}$$

$$= \frac{4{,}8\ \text{rad}}{4{,}0\ \text{s}} = 1{,}2\ \text{rad/s}.$$

Levyn hetkellinen kulmanopeus saadaan (t, φ)-koordinaatistosta kuvaajan haluttuun kohtaan piirretyn tangentin fysikaalisena kulmakertoimena. Hetkelliseksi kulmanopeudeksi hetkellä $t = 4{,}0$ s saadaan

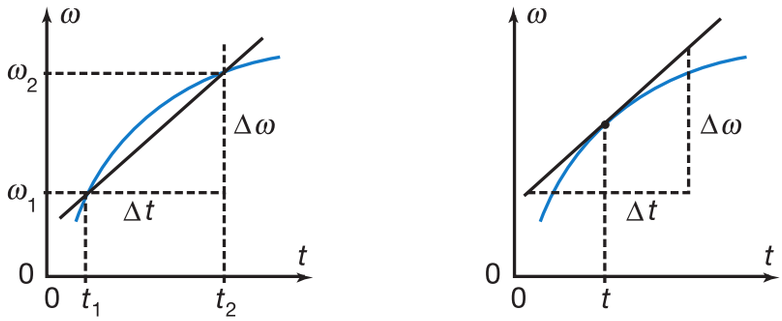
$$\omega(4{,}0\ \text{s}) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{4{,}8\ \text{rad}}{3{,}0\ \text{s}} = 1{,}6\ \text{rad/s}.$$

Kulmakiihtyvyys



Tutkitaan edellisessä oppilastyössä saatua (t, ω)-kuvaajaa. Levyn kulmanopeuden muutos yhtä pitkinä aikaväleinä on aina yhtä suuri, joten levyn kulmakiihtyvyys on vakio. Tällaista liikettä sanotaan **tasaisesti kiihtyväksi** pyörimisliikkeeksi.

Muuttuvassa pyörimisliikkeessä olevan kappaleen **keskimääräinen kulmakiihtyvyys** (keskikulmakiihtyvyys) tietyllä aikavälillä saadaan jakamalla kulmanopeuden muutos siihen kuluneella ajalla.



Keskikulmakiihtyvyys aikavälillä $t_1 \ldots t_2$ ja hetkellinen kulmakiihtyvyys hetkellä t.

Pyörimisliikkeen kulmakiihtyvyys α vastaa suureena etenevän liikkeen kiihtyvyyttä a.

Keskikulmakiihtyvyys
Kappaleen keskikulmakiihtyvyys α_k on

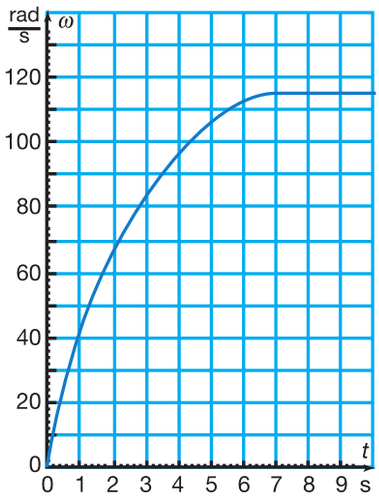
$$\alpha_k = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1},$$

jossa ω_1 ja ω_2 ovat kappaleen kulmanopeudet hetkillä t_1 ja t_2.

Kappaleen hetkellinen kulmakiihtyvyys saadaan (t, ω)-koordinaatistoon piirretyn kuvaajan tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta.

Kulmakiihtyvyyden yksikkö on $[\alpha] = \frac{[\Delta\omega]}{[\Delta t]} = \frac{1\ \text{rad/s}}{1\ \text{s}} = 1\ \text{rad/s}^2$.

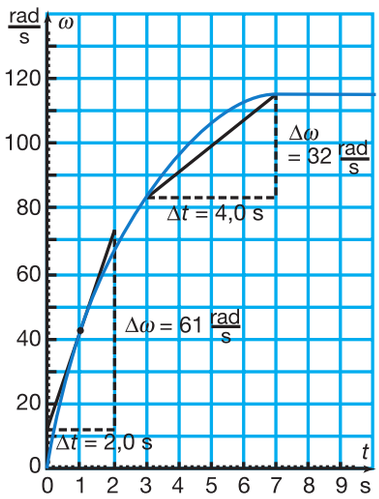
Esimerkki 6



Viereisessä kuvassa esitetään pesukoneen rummun kulmanopeus (t, ω)-koordinaatistossa.
a) Tulkitse kuvaajaa.
b) Määritä rummun keskikulmakiihtyvyys aikavälillä 3,0 s … 7,0 s.
c) Määritä rummun hetkellinen kulmakiihtyvyys hetkellä $t = 1{,}0$ s.

$t_1 = 3{,}0$ s, $\quad t_2 = 7{,}0$ s

a) Pesukoneen rummun kulmakiihtyvyys ei ole vakio, koska kuvaaja (t, ω)-koordinaatistossa ei ole suora. Aluksi lingon pyöriminen on kiihtyvää ja kulmanopeus kasvaa. Kulmanopeus saavuttaa suurimman arvonsa vähitellen ja pysyy linkouksen jatkuessa vakiona.



b) Rummun keskikulmakiihtyvyys aikavälillä 3,0 s … 7,0 s on

$$\alpha_k = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{115\ \text{rad/s} - 83\ \text{rad/s}}{7{,}0\ \text{s} - 3{,}0\ \text{s}}$$

$$= \frac{32\ \text{rad/s}}{4{,}0\ \text{s}} = 8{,}0\ \text{rad/s}^2.$$

Keskikulmakiihtyvyys on 8,0 rad/s^2.

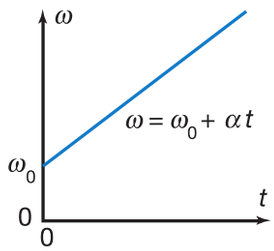
c) Kohtaan $t = 1{,}0$ s piirretyn käyrän tangentin kulmakertoimesta saadaan hetkelliseksi kulmakiihtyvyydeksi

$$\alpha(1{,}0\ \text{s}) = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{73\ \text{rad/s} - 12\ \text{rad/s}}{2{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}}$$

$$= \frac{61\ \text{rad/s}}{2{,}0\ \text{s}} \approx 31\ \text{rad/s}^2.$$

Hetkellinen kulmakiihtyvyys hetkellä $t = 1{,}0$ s on 31 rad/s^2.

Jos vakiokulmakiihtyvyydellä α pyörivällä kappaleella on alkuhetkellä $t = 0$ s kulmanopeus ω_0 ja hetkellä t kulmanopeus ω, on $\Delta t = t$ ja yhtälö $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ saadaan muotoon $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$. Näin ollen kappaleen kulmanopeus ajan t kuluttua on $\omega = \omega_0 + \alpha t$.

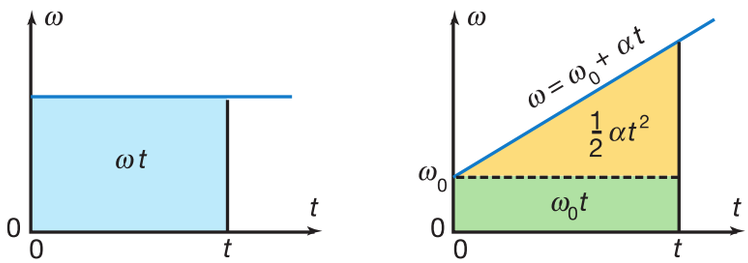


Kulmanopeus tasaisesti kiihtyvässä pyörimisliikkeessä
Tasaisesti kiihtyvässä pyörimisliikkeessä olevan kappaleen kulmanopeus ajan t kuluttua on

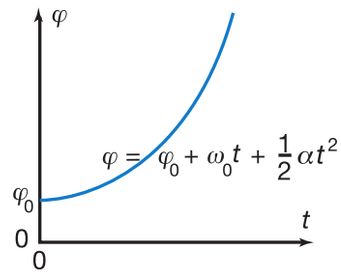
$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

jossa α on kappaleen vakiokulmakiihtyvyys, ω_0 kappaleen kulmanopeus hetkellä $t = 0$ s ja ω kulmanopeus hetkellä t.

Tasaisesti kiihtyvässä pyörimisliikkeessä olevan kappaleen kiertokulma ajan t kuluttua saadaan laskemalla (t, ω)-koordinaatistossa suoran $\omega = \omega_0 + \alpha t$ ja t-akselin väliin jäävän alueen fysikaalinen pinta-ala: kiertokulma ajan t kuluttua on $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$.



Kiertokulma saadaan (t, ω)-koordinaatistosta fysikaalisena pinta-alana.



Tasaisesti kiihtyvän pyörimisliikkeen kuvaaja (t, φ)-koordinaatistossa.

Kiertokulma tasaisesti kiihtyvässä pyörimisliikkeessä
Jos kappale on alkuhetkellä $t = 0$ s pyörinyt kulman φ_0, kiertokulma hetkellä t on

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

Esimerkki 7

Huvipuistossa on helppo tutkia pyörimisliikkeen ilmiöitä. Laitteen nimi on Teekupit.

Huvipuiston kieputin lähtee pyörimään levosta. Kieputtimen kulmakiihtyvyys on vakio 0,15 rad/s^2. Kiihdytys kestää 16 s. Tämän jälkeen kieputin pyörii tasaisella kulmanopeudella 24 s, ja sitten pyöriminen hidastuu tasaisesti ja pysähtyy 35 s:ssa. Kuinka monta kierrosta kieputin pyörii hidastumisen aikana?

$\alpha_1 = 0{,}15 \text{ rad/s}^2, \quad t_1 = 16 \text{ s}, \quad t_2 = 35 \text{ s}$

Koska alussa kulmakiihtyvyys on vakio, kulmanopeus 16 s:n kuluttua alkukiihdytyksen lopussa ja hidastumisen alkaessa on

$$\omega_1 = \alpha_1 t_1 = 0{,}15 \text{ rad/s}^2 \cdot 16 \text{ s} = 2{,}4 \text{ rad/s}.$$

Tasaisesti hidastuvan pyörimisen aikana kieputin pyörii kulman $\varphi = \omega_1 t_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 t_2^2$, jossa kulmakiihtyvyys on

$$\alpha_2 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{0{,}0 \text{ rad/s} - 2{,}4 \text{ rad/s}}{35 \text{ s}} \approx -0{,}068571 \text{ rad/s}^2.$$

Hidastuvan pyörimisliikkeen aikana kiertokulma on

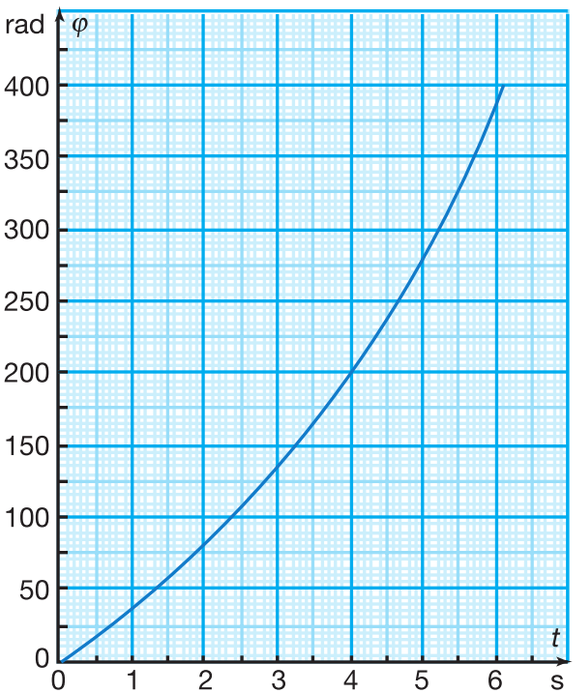
$$\begin{aligned}\varphi &= \omega_1 t_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 t_2^2 \\ &= 2{,}4 \text{ rad/s} \cdot 35 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-0{,}068571 \text{ rad/s}^2) \cdot (35 \text{ s})^2 \\ &\approx 42{,}000 \text{ rad}.\end{aligned}$$

Kierrosten määrä on $\dfrac{42{,}000 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \approx 6{,}7$.

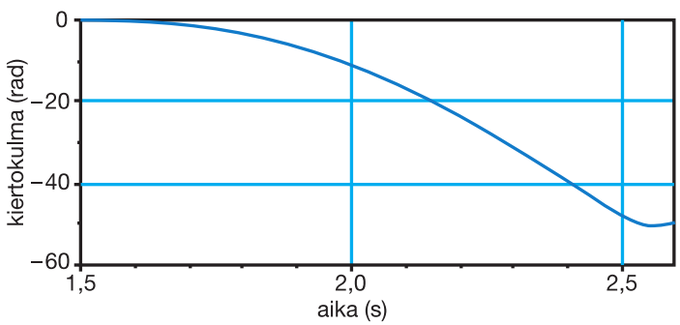
Kieputin pyörii 6,7 kierrosta.

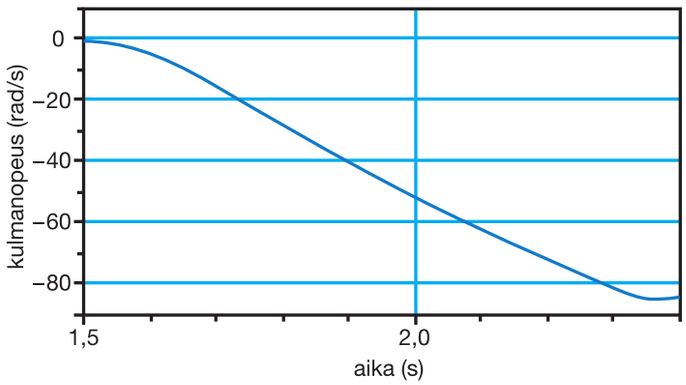
Tehtäviä

1-15. Kuvaaja esittää pesukoneen rummun kiertokulmaa ajan funktiona.
a) Kuinka suuri on rummun kiertokulma 4,0 sekunnin kuluttua?
b) Kuinka monen sekunnin kuluttua rumpu on kiertänyt 50 kierrosta?
c) Määritä kuvaajan perusteella rummun keskikulmanopeus aikavälillä 0,0 s … 3,0 s sekä kulmanopeus hetkellä $t = 5{,}0$ s.



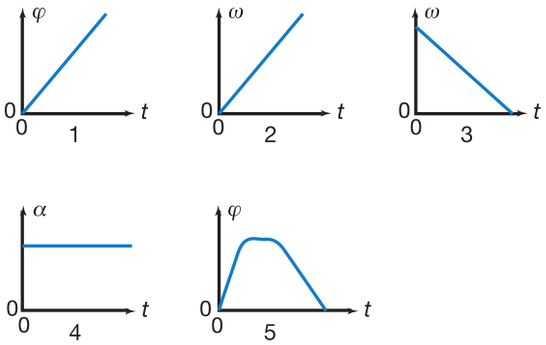
1-16. Pyörimisliikettä tutkittiin tietokoneeseen kytketyn pyörimisliikeanturin avulla. Anturin ulkokehän uralle kierrettiin lankaa. Lanka ohjattiin herkkäliikkeisen väkipyörän kautta ja langan päähän ripustettiin pieni punnus. Punnus päästettiin putoamaan. Anturin akselin pyöriminen on esitetty alla olevissa kuvaajissa.



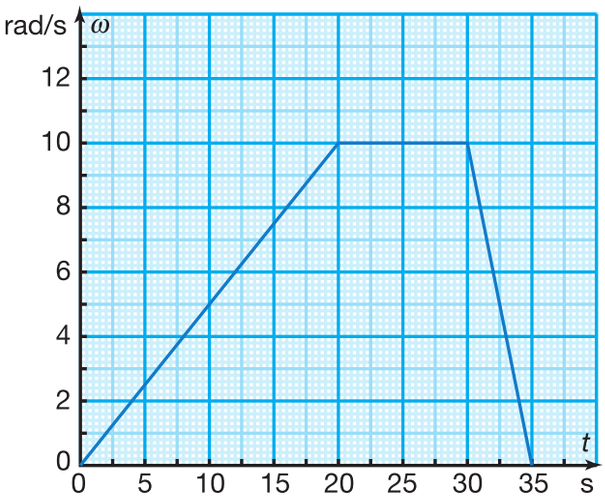


a) Miksi kiertokulman arvot ovat negatiiviset?
b) Minkälaisesta pyörimisliikkeestä on kysymys?
c) Laske anturin keskikulmakiihtyvyys.

1-17. Mitkä seuraavista kuvaajista esittävät tasaisesti kiihtyvää pyörimisliikettä?



1-18. Kuvaaja esittää yksinkertaistettuna pyörivän levyn kulmanopeutta ajan funktiona.



a) Kuvaile levyn pyörimistä.
b) Millä aikavälillä levyn kulmakiihtyvyys on suurin?
c) Esitä levyn kulmakiihtyvyys ajan funktiona.
d) Laske levyn kiertokulma aikavälillä 0,0 s … 30,0 s.

1-19. Laboratoriossa mitattiin pyörivän levyn kulmanopeutta. Mittaustulokset ovat taulukossa.

t/s	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	7,5
ω/rad/s	2,9	5,1	7,9	9,8	10,4	9,0	6,0	2,0	0,0

a) Esitä mittaustulokset (t, ω)-koordinaatistossa.
b) Määritä levyn keskikulmakiihtyvyys aikavälillä 1,0 s … 3,5 s ja 4,5 s … 7,0 s.
c) Määritä levyn kulmakiihtyvyys hetkellä 5,5 s.
d) Määritä levyn kiertokulma mittauksen aikana.

1-20. Voimistelija tekee rekillä jättiläisen (eli pyörii täyden kierroksen) suorin vartaloin kolme kertaa peräkkäin 2,9 sekunnissa. Laske voimistelijan keskikulmanopeus.

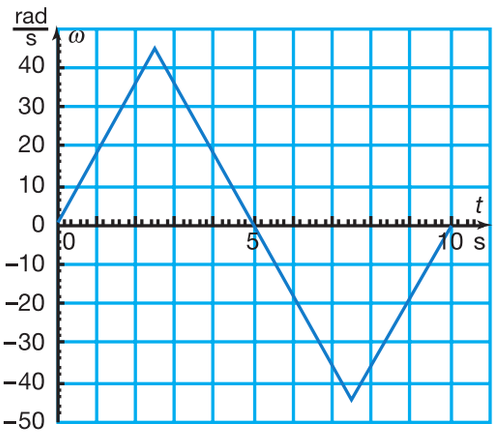
1-21. Tuoremehulingon sähkömoottorin akseli saavuttaa levosta lähtien 4,0 sekunnissa pyörimisnopeuden 2400 r/min.
a) Mikä on tällä nopeudella pyörivän akselin kierrosaika?
b) Mikä on tällä nopeudella pyörivän akselin kulmanopeus?
c) Mikä on moottorin keskikulmakiihtyvyys 4,0 sekunnin aikana lähdöstä?

1-22. Helteellä käytettävän pöytätuulettimen siiven pyörimisnopeus on 2,5 r/s. Tuulettimen käyttö lopetetaan, ja tuuletin pysähtyy 13 sekunnissa.
a) Laske tuulettimen siiven keskikulmakiihtyvyys.
b) Montako kierrosta tuulettimen siipi pyörii ennen pysähtymistään?

1-23. Vauhtipyörän kulmanopeus pienenee 5,0 sekunnin aikana tasaisesti arvosta 110 rad/s arvoon 45 rad/s.
a) Mikä on vauhtipyörän keskikulmakiihtyvyys?
b) Kuinka monta täyttä kierrosta vauhtipyörä ehtii kyseisen 5,0 s:n aikana pyöriä?

1-24. Riina polkee spinningtunnilla kuntopyörää. Harjoitus kestää 3,0 min. Keskiön, johon polkimet on kiinnitetty, pyöriminen on tasaisesti kiihtyvää 40 s:n ajan, kunnes keskiö saavuttaa maksimikierrostaajuuden 170 rpm. Kuinka monta kierrosta Riina polkee tämän harjoituksen aikana? Pyörän vastusta ei muuteta.

1-25. Jojon pyörimistä tutkittiin ja saatiin oheinen kuvaaja. Pyörimisen suunta vastapäivään on valittu positiiviseksi, samoin liike alaspäin.

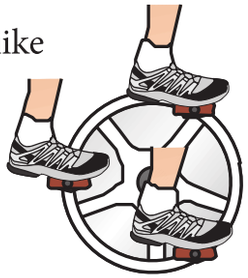


a) Jojo päästetään pyörimään hetkellä $t = 0{,}0$ s. Milloin se palaa takaisin käteen?
b) Kuvaile jojon liikettä aikavälillä 0,0 s … 10,0 s.
c) Kuinka monta kierrosta jojo pyörähtää aikavälillä 0,0 s … 5,0 s?

Testaa, osaatko

Oikeita vastausvaihtoehtoja voi olla yksi tai useampia.

1. Kuntopyörän polkimen liike pyörää poljettaessa on
a) ympyräliikettä
b) etenemisliikettä
c) pyörimisliikettä.



2. Kuntopyörän poljin on kiinnitetty keskiöön. Keskiön liike poljettaessa on
a) ympyräliikettä
b) etenemisliikettä
c) pyörimisliikettä.

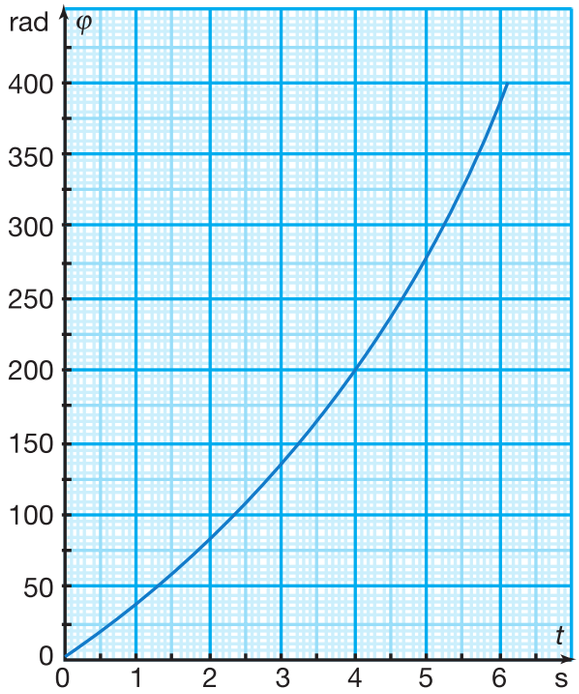
3. Levysoittimessa on merkintä 33,3 rpm. Se tarkoittaa, että soittimessa olevan vinyylilevyn
a) kulmanopeus on 33,3 kierrosta minuutissa
b) pyörimisnopeus on 0,56 r/s
c) pyörähdysaika on 1,8 s.

4. Mitkä seuraavista ovat esimerkkejä pyörivistä kappaleista:
a) arkkupakastimen kansi pakastinta avattaessa
b) lentokoneen potkurit nousun aikana
c) liikkuvassa karusellissa istuva lapsi?

5. Kulmanopeus kertoo kappaleen
a) asennon muuttumisnopeuden
b) paikan muuttumisnopeuden
c) hetkellisen nopeuden.

6. Kappaleen pyörimiseen liittyvistä suureista etenemisliikkeen kiihtyvyyttä a vastaa
a) kulmakiihtyvyys α
b) normaalikiihtyvyys a_n
c) tangenttikiihtyvyys eli ratakiihtyvyys a_t.

7. Kuvaajan mukaan kappaleen keskikulmanopeus aikavälillä 0,0 s … 4,0 s on



a) 200 r/s b) 50 r/s c) 50 rad/s.

8. Polkupyörän pinnan keskelle kiinnitetään pieni nappi matkamittaria varten. Kun pyörällä ajetaan, napin ja venttiilin
a) kulmanopeudet ovat samat
b) ratanopeudet ovat samat
c) pyörimisnopeudet ovat samat.

9. Miksi vettä poistuu pyykinpesukoneen rummusta linkouksen aikana?
a) Pyörimisestä aiheutuva voima vetää vettä ulos rummusta.
b) Rummun seinämissä on reikiä, eikä niiden kohdalle muodostu tukivoimaa, joka pitäisi veden rummussa.
c) Vesi pyrkii jatkavuuden lain mukaisesti pois ympyräradalta.

Tiivistelmä

- Pyörimisnopeus ilmoittaa, kuinka monta kierrosta kappale pyörii aikayksikössä.
- Kiertokulma φ määritellään kaaren pituuden s ja säteen r suhteena: $\varphi = \frac{s}{r}$.
- Keskikulmanopeus on $\omega_k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}$, jossa φ_1 ja φ_2 ovat kappaleen kiertokulmat hetkinä t_1 ja t_2.
- Tasaisessa pyörimisliikkeessä kulmanopeus ω on vakio. Jos alkuhetkellä $t = 0$ s kappaleen kiertokulma on φ_0, kiertokulma ajan t kuluttua on $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.
- Kulmanopeus ω on pyörimisnopeuden n avulla esitettynä $\omega = 2\pi n$.
- Kappaleen keskikulmakiihtyvyys on $\alpha_k = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$, jossa ω_1 ja ω_2 ovat kappaleen kulmanopeudet hetkillä t_1 ja t_2.
- Tasaisesti kiihtyvässä pyörimisliikkeessä olevan kappaleen kulmanopeus ajan t kuluttua on $\omega = \omega_0 + \alpha t$, jossa α on kappaleen vakiokulmakiihtyvyys, ω_0 kappaleen kulmanopeus hetkellä $t = 0$ s ja ω kulmanopeus hetkellä t.
- Jos kappale on alkuhetkellä $t = 0$ s pyörinyt kulman φ_0, kiertokulma hetkellä t on $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$.

2 Ympyräliike

Tässä luvussa opit
- **tasaisen ja muuttuvan ympyräliikkeen.**

Keskeisiä käsitteitä ovat
- **ratanopeus**
- **normaali- ja tangenttikiihtyvyys**
- **kiihtyvyys.**

Tulitaiteilija saa aikaan näyttäviä kuvioita ympyräliikkeen avulla.

Pastakoneella saa kotitekoisen taikinan muotoiltua tarpeeksi ohueksi. Koneen telat ovat pyörimisliikkeessä. Kampea pyörittävä käsi on ympyräliikkeessä. Pastataikina on etenemisliikkeessä.

Ympyräliike

Kappale on **ympyräliikkeessä**, jos se liikkuu **pitkin ympyrärataa**. Karusellissa ja napakelkassa istuja liikkuu pitkin ympyrärataa. Jos napakelkka pyörii vakiovauhdilla, siinä istuva on tasaisessa ympyräliikkeessä.

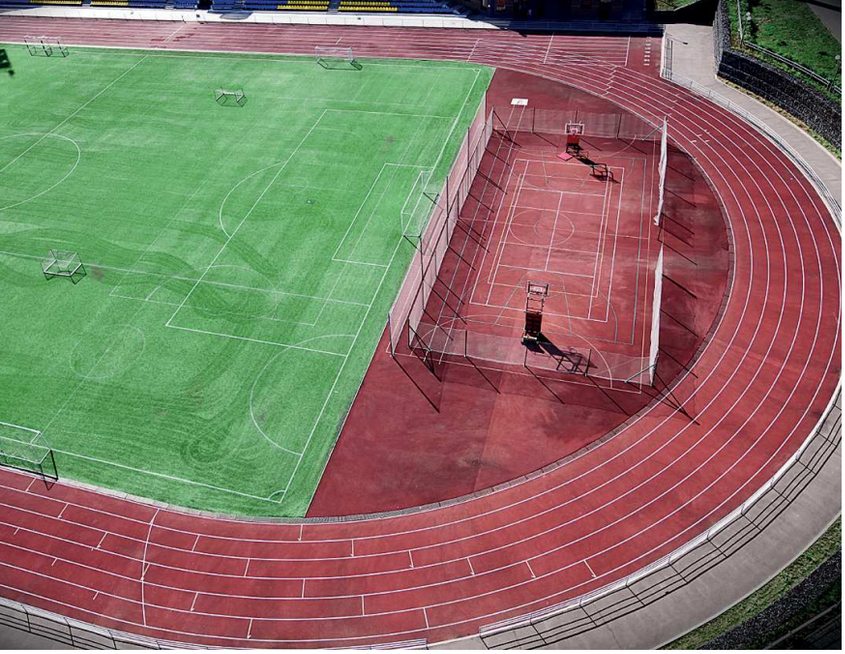
Ympyräliike on yksi käyräviivaisen kaksiulotteisen liikkeen perusmalli. Yleensä kappale, kuten moukari, on samalla sekä ympyräliikkeessä että pyörimisliikkeessä. Moukarinheittäjä pyörittää moukaria likimain pitkin ympyrärataa. Vaijeri kohdistaa moukariin voiman, joka suuntautuu radan keskipistettä kohti ja saa moukarin liikkumaan ympyrärataa pitkin. Kun heittäjä irrottaa otteensa, moukari lähtee liikkeelle suoraviivaisesti.

Pyykinpesukoneessa olevat vaatteet ovat pesun aikana ympyräliikkeessä. Kun kone aloittaa linkouksen, rummun ympyräliike nopeutuu. Vaatteet ovat silloin **muuttuvassa ympyräliikkeessä**. Muuttuvassa ympyräliikkeessä on myös autoilija, joka hidastaa tai nopeuttaa auton vauhtia mutkassa.

Auton nopeusvektorin suunta muuttuu aina, kun auton kulkusuunta muuttuu. Vaikka ympyräkaarteessa vakiovauhdilla kulkevan auton nopeusmittari näyttää koko ajan samaa lukemaa, auto on kiihtyvässä liikkeessä. Liikkeen suunnan muutos merkitsee aina kiihtyvää liikettä.

Maailmanpyörän kori ei käänny kierroksen aikana itsensä ympäri, joten se ei ole pyörimisliikkeessä vaan ainoastaan etenevässä liikkeessä ympyrädalla. **Ympyräliikkeessä tarkastellaan kappaleen paikan muuttumista, ei asennon muuttumista.**

Kun tuuliviiri pyörii tuulen mukaan, viirin nuolen kärki on ympyräliikkeessä ja viiri pyörimisliikkeessä.



2.1 Kappale ympyräliikkeessä

Oppilastyö ▪ Ympyräliike

Aseta piirtoheittimen päälle esimerkiksi pahvista tehty rengas, jonka alaosassa on pieni kuulan mentävä aukko. Saata kuula renkaan sisälle kiertämään pitkin ympyrärataa. Tarkkaile kuulan suuntaa, kun se poistuu ympyräradalta.

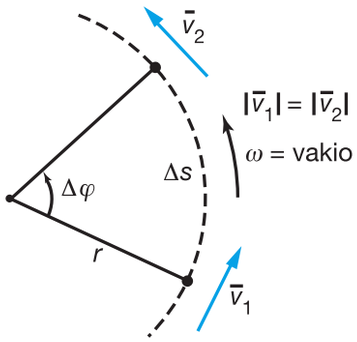
Kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima aiheuttaa Newtonin II lain mukaan kappaleelle voiman suuntaisen kiihtyvyyden. Nopeuden muutos voi olla nopeuden suuruuden, suunnan tai molempien muutosta. Kappaleen hetkellistä nopeutta kuvaava vektori on aina liikeradan tangentin suuntainen. Oppilastyössä kuula poistuu ympyräradalta tangentin suunnassa.

Vaikka kappale ei koko ajan liikkuisikaan ympyräradalla, kappaleen liikettä voidaan hetkellisesti tarkastella ympyräliikkeen mallin avulla. Ympyräradalla kappaleen nopeuden suunta muuttuu liikkeen aikana.

Ratanopeus

Ajatellaan pieni punnus massapisteeksi, joka liikkuu kuvan mukaisesti pitkin ympyrärataa. Kun massapiste kulkee matkan Δs, keskuskulma muuttuu $\Delta\varphi$:n verran. Massapisteen ratanopeus

saadaan kuljetun matkan Δs ja kuluneen ajan Δt osamääränä, $v = \Delta s/\Delta t$.



Viereisessä piirroksessa on esitetty vakiokulmanopeudella ω ympyrärataa liikkuvan kappaleen kulma- ja ratasuureita. Huomaa, että nopeudet $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ ovat kohtisuorassa ympyrän sädettä vastaan. Kiertymä $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta s}{r}$ voidaan kirjoittaa muotoon $\Delta s = r\Delta\varphi$. Ympyräliikkeessä olevan massapisteen ratanopeudelle v saadaan siten yhtälö $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} r = \omega r$.

Ratanopeus
Ympyräradalla olevan kappaleen ratanopeus on
$v = \omega r$,
jossa ω on kappaleen kulmanopeus ja r radan säde.

Ratanopeus voidaan esittää eri muodoissa:

$$v = \omega r = 2\pi n r = 2\pi \frac{1}{T} r = \frac{2\pi r}{T}.$$

Esimerkki 1

Huvipuiston ketjukarusellissa istuva lapsi kiertää vakiovauhdilla karusellin akselin ympäri 7,0 kertaa minuutissa. Lapsen etäisyys karusellin akselista on 4,7 m. Laske
a) aika, jossa karuselli kiertää yhden kierroksen
b) millä kulmanopeudella lapsi kiertää karusellin akselia
c) lapsen ratanopeus
d) lapsen 4,0 minuutissa karusellin tuolissa kulkema matka
e) karusellin akselin ja lapsen välisen säteen kiertokulman muutos 4,0 minuutissa.

$n = 7{,}0$ r/min, $\quad r = 4{,}7$ m, $\quad \Delta t = 4{,}0$ min

a) Karusellin kierrosaika on $T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\dfrac{7{,}0}{60\text{ s}}} = \dfrac{60\text{ s}}{7{,}0} \approx 8{,}6\text{ s}.$

b) Lapsen kulmanopeus karusellin akselin ympäri on

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \frac{7{,}0}{60}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0{,}73304\text{ rad/s} \approx 0{,}73\text{ rad/s}.$$

c) Lapsen ratanopeus on

$$v = \omega r = 0{,}73304\ 1/\text{s} \cdot 4{,}7\ \text{m} = 3{,}44529\ \text{m/s} \approx 3{,}4\ \text{m/s}.$$

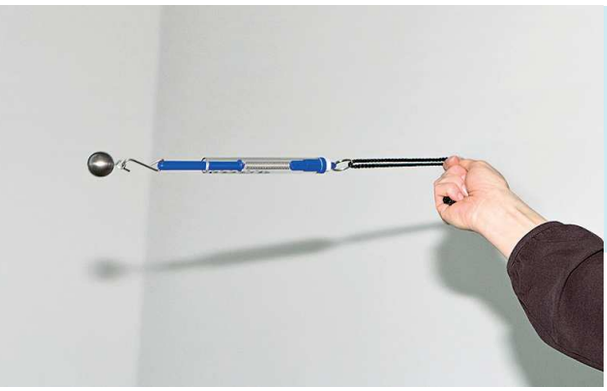
d) Lapsen 4,0 minuutissa kulkema matka on

$$\Delta s = v\Delta t = 3{,}44529\ \text{m/s} \cdot 60\ \text{s} \cdot 4{,}0 = 826{,}870\ \text{m} \approx 830\ \text{m}.$$

e) Kiertokulman muutos on $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta s}{r} = \dfrac{826{,}870\ \text{m}}{4{,}7\ \text{m}} \approx 180\ \text{rad}.$

Kierrosaika on 8,6 s, kulmanopeus 0,73 rad/s, ratanopeus 3,4 m/s, matka 830 m ja kiertymä 180 rad.

2.2 Tasainen ympyräliike



Oppilastyö ▪ Ympyrärata
Kiinnitä jousivaakaan naru ja narun päähän pieni punnus. Pyöritä jousivaakaa vakiovauhdilla varovasti vaakatasossa. Muuta pyöritysvauhtia. Tarkkaile vaa'an lukemaa.

Oppilastyössä punnukseen kohdistuu voima, joka havaitaan jousivaa'asta. Punnus on kiihtyvässä liikkeessä, vaikka punnuksen vauhti radalla on vakio. Koska rataliike on tasaista, kappaleen kiihtyvyys radan tangentin suunnassa on nolla. Koska punnuksen nopeuden suunta kuitenkin muuttuu, punnuksella on kiihtyvyyttä. Kiihtyvyys $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ aiheutuu nopeuden suunnan muuttumisesta. Tätä kiihtyvyyttä kutsutaan **normaalikiihtyvyydeksi**. Se on kohtisuorassa nopeusvektoria vastaan ja osoittaa radan keskipistettä kohti.

Normaalikiihtyvyys
Normaalikiihtyvyyden $\vec{a}_\text{n}$ suunta on ympyäradan keskipistettä kohti, ja sen suuruus on

$$a_\text{n} = \frac{v^2}{r},$$

jossa v on kappaleen ratanopeus ja r radan säde.
Normaalikiihtyvyys kuvaa kappaleen nopeuden suunnan muutosnopeutta.

Kiihtyvyyden aiheuttajina ovat ympyräliikkeessäkin aina voimat; Newtonin toisen lain mukaan tasaisessa ympyräliikkeessä ympyräradalla olevan kappaleen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Tasaisessa ympyräliikkeessä massapistettä radalla pitävä kokonaisvoima suuntautuu ympyrän keskipistettä kohti. Esimerkiksi moukarinheitossa voimana on moukarin vaijerin jännitysvoima. Ympyrärataa kiertävän auton taas pitää radallaan auton renkaiden ja tienpinnan välinen kitka.

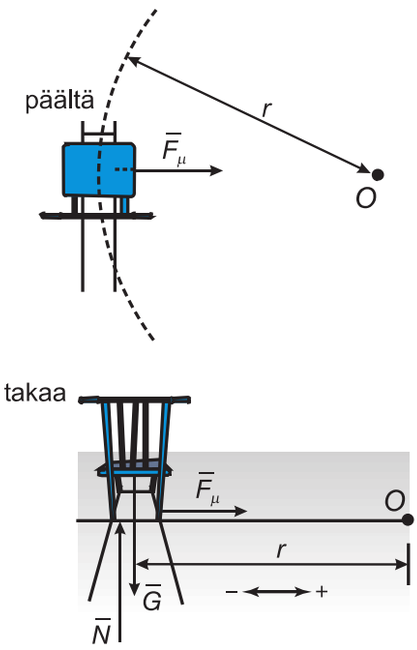
Tasaisessa ympyräliikkeessä olevan massapisteen normaalikiihtyvyyden suuruudelle voidaan johtaa erilaisia lausekkeita:

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$$

$$a_\mathrm{n} = \omega^2 r = (2\pi n)^2 r = 4\pi^2 n^2 r$$

$$a_\mathrm{n} = 4\pi^2 n^2 r = 4\pi^2 \left(\frac{1}{T}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}\,.$$

Esimerkki 2



Vaakasuoralla jäällä oleva kaarre potkitaan potkukelkalla vakiovauhdilla 17 km/h. Kaarteen säde on 45 m. Kuinka suuri kitkakertoimen pitää vähintään olla, jotta potkukelkka pysyisi radalla eikä liukuisi sivulle? Oletetaan ilmanvastus pieneksi.

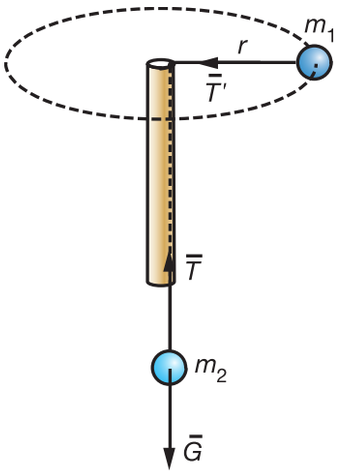
$v = 17$ km/h, $\quad r = 45$ m, $\quad g = 9{,}81$ m/s^2

Potkukelkkaan vaikuttava kokonaisvoima on $\sum \overline{F} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_\mu$. Kitkan $F_\mu = \mu N = \mu mg$ johdosta kelkka pysyy ympyräradalla. Koska pinta on vaakasuora, pinnan tukivoima $\overline{N}$ ja kelkkaan kohdistuva paino $\overline{G}$ ovat yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset. Kelkan liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Valitaan suunta kohti radan keskipistettä positiiviseksi. Skalaariyhtälönä saadaan $\mu mg = m\dfrac{v^2}{r}$.

Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{v^2}{rg} = \frac{\left(\dfrac{17}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}\right)^2}{45\ \mathrm{m} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} \approx 0{,}051.$$

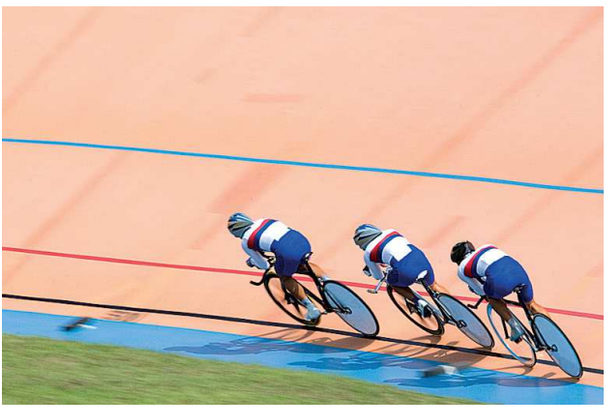
Kitkakertoimen on oltava vähintään 0,051.



Langan jännitysvoima pitää punnuksen ympyräradalla.

Oppilastyö ▪ Voimat ympyräliikkeessä

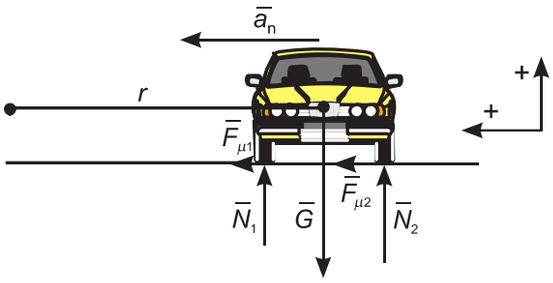
Kiinnitä punnukseen (massa m_2) naru ja pujota se putken läpi siten, että naru ja punnus jäävät roikkumaan. Kiinnitä narun yläpäähän toinen punnus (massa m_1, $m_1 < m_2$) siten, että sitä voidaan putkesta kiinni pitäen pyörittää vakiovauhdilla samalla, kun toinen punnus roikkuu putken alapäässä. Mittaa punnusten massat, punnuksen m_1 ympyräliikkeen säde ja ratanopeus. Vertaa roikkuvaan punnukseen kohdistuvaa painoa ($G = m_2 g$) ja langan jännitysvoimaa ($T' = m_1 v^2/r$) toisiinsa. Toista mittaus muuttamalla punnusten massoja.



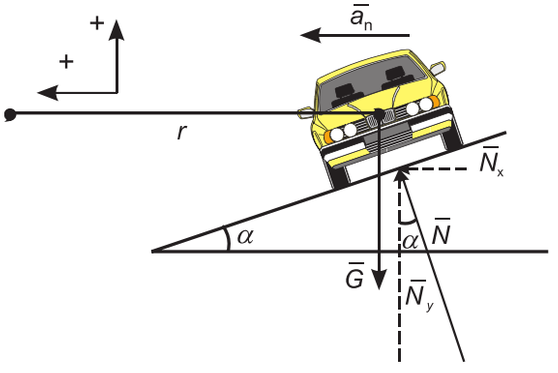
Kilpapyöräilijöitä velodromilla. Pyöräilijä pysyy ympyräradalla kitkan ja pinnan tukivoiman vaakakomponentin yhteisvaikutuksen vuoksi.

Kun auto ajaa vaakasuorassa kaarteessa, renkaiden ja tienpinnan välinen kitka aiheuttaa normaalikiihtyvyyden. Kitka saa auton ja sen mukana matkustajat liikkumaan ympyräradalla. Matkustajaan kohdistuvat voimat ovat paino, istuimen kitka sekä auton korin ja turvavöiden tukivoimat. Nämä voimat pitävät matkustajan samalla kaarevalla radalla, jolla autokin liikkuu. Matkustaja kallistuu kaarteen ulkoreunaan päin, koska jatkavuuden lain mukaan hän pyrkii säilyttämään nopeutensa suunnan, joka on liikeradan tangentin suunta kyseisellä hetkellä. Auton ulosajo kaarteessa johtuu siitä, että auto jatkaa suoraviivaista liikettään, jos kitka ei pysty muuttamaan sen liikesuuntaa.

Jos **tie kallistuu** kaarteessa, auton radan säteeksi otetaan vaakasuora (kohtisuora) etäisyys radan keskipisteeseen, ei etäisyyttä tienpinnan suunnassa.



Auto vaakasuoralla tiellä.

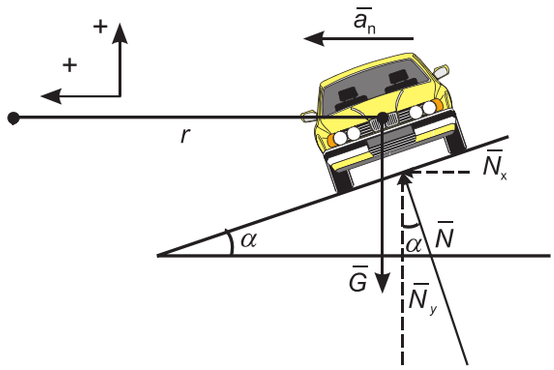


Auto kaltevalla tiellä. Oletetaan kitka pieneksi.

Esimerkki 3

Auto ajaa vakiovauhdilla 72 km/h jäistä, sileää kaarretta, jonka kaarevuussäde on 150 m. Kuinka suuri tien kaltevuuden tulee olla, jotta auto pysyisi tiellä nastattomilla renkailla? Oletetaan vastusvoimat pieniksi.

$v = 72$ km/h, $\quad r = 150$ m, $\quad g = 9{,}81$ m/s^2



Kun vastusvoimat ovat pienet, autoon kohdistuvat voimat ovat paino ja tienpinnan tukivoima. Auton radan säde on etäisyys radan keskipisteestä. Auton tiellä pitävä kokonaisvoima suuntautuu kaarteen keskipistettä kohti ja on vaakasuora. Liikeyhtälö vaakasuunnassa on $\sum \bar{F}_x = m\bar{a}_n$. Pystysuunnassa liikeyhtälö on $\sum \bar{F}_y = \bar{0}$, koska autolla ei ole kiihtyvyyttä pystysuunnassa.

Kun valitaan suunnat radan keskipistettä kohti ja ylös positiivisiksi, saadaan skalaariyhtälöt $N_x = m\dfrac{v^2}{r}$ ja $N_y - G = 0$ eli $N\sin\alpha = m\dfrac{v^2}{r}$ ja $N\cos\alpha - mg = 0$.

Kirjoitetaan yhtälöt allekkain:

$$N\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$$
$$N\cos\alpha = mg.$$

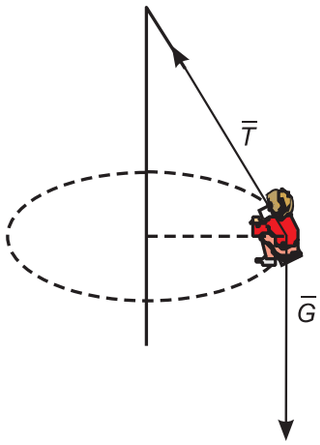
Kun yhtälöt jaetaan puolittain, saadaan $\dfrac{N\sin\alpha}{N\cos\alpha} = \dfrac{m\dfrac{v^2}{r}}{mg}$ eli

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(\dfrac{72}{3{,}6}\ \text{m/s}\right)^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 150\ \text{m}}, \text{ josta } \alpha \approx 15°.$$

Kaltevuuskulman tulee olla 15°.

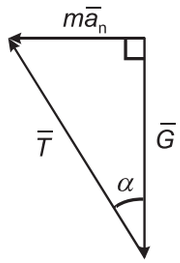
Esimerkki 4



Elina istuu huvipuiston ketjukarusellissa. Kun karusellin istuin on 4,1 m:n etäisyydellä karusellin akselista, Elinan vauhti on 3,3 m/s. Elinan ja istuimen yhteinen massa on 22 kg. Määritä istuimen köyden jännitysvoiman suuruus. Oletetaan vastusvoimat pieniksi.

$v = 3{,}3\ \text{m/s}, \quad r = 4{,}1\ \text{m}, \quad m = 22\ \text{kg}, \quad g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Piirretään tilanteesta vapaakappalekuva. Elina liikkuu vakiovauhdilla pitkin vaakasuoraa ympyrärataa, joten normaalikiihtyvyyden suunta on kohti radan keskipistettä. Elinan ja tuolin liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$ eli $\overline{G} + \overline{T} = m\overline{a}_\text{n}$. Vektorit $\overline{G}$, $\overline{T}$ ja $m\overline{a}_\text{n}$ muodostavat suorakulmaisen kolmion sivut. Köyden jännitysvoiman $\overline{T}$ suuruus saadaan Pythagoraan lauseen avulla eli $T = \sqrt{G^2 + (ma_\text{n})^2}$.



Köyden jännitysvoiman suuruus on

$$T = \sqrt{(mg)^2 + \left(m\frac{v^2}{r}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(22\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2)^2 + \left(22\ \text{kg} \cdot \frac{(3{,}3\ \text{m/s})^2}{4{,}1\ \text{m}}\right)^2} \approx 220\ \text{N}.$$

Jännitysvoiman suunta saadaan yhtälöstä

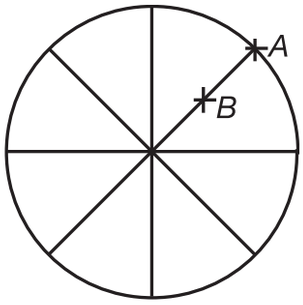
$$\tan\alpha = \frac{ma_\text{n}}{mg} = \frac{a_\text{n}}{g} = \frac{\frac{v^2}{r}}{g} = \frac{\frac{(3{,}3\ \text{m/s})^2}{4{,}1\ \text{m}}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}2708,$$

josta $\alpha \approx 15°$.

Jännitysvoiman suuruus on 220 N. Voiman suunta on 15° kuvan mukaisesti.

Tehtäviä

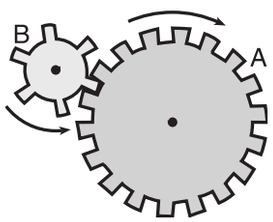
2-1. Kuvassa polkupyörän vanteeseen on kiinnitetty kaksi pientä tarraa. Kumman tarran
a) ratanopeus b) kulmanopeus on suurempi?



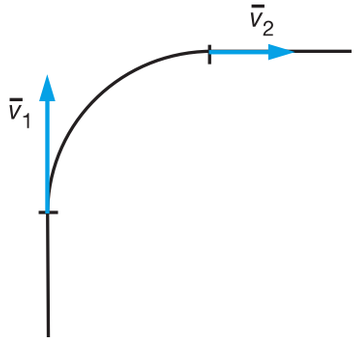
2-2. Kellon sekunti- ja minuuttiviisarit ovat 15 cm:n pituiset. Tuntiviisarin pituus on 5,0 cm. Oletetaan, että jokaisen viisarin liike on tasaista ympyräliikettä.
a) Minkä viisarin pään ratanopeus on suurin?
b) Laske sekuntiviisarin 1) kierrosaika 2) pyörimisnopeus 3) kulmanopeus 4) pään ratanopeus ja vuorokaudessa kulkema matka.

2-3. Tietokoneen kiintolevyn pyörimisnopeus on 5400 r/min ja halkaisija 3,5 tuumaa.
a) Laske kiintolevyn reunassa olevan pisteen ratanopeus.
b) Miten pisteen ratanopeus muuttuu, jos se siirretään lähemmäs kiintolevyn keskustaa?

2-4. Hammaspyörien A ja B säteet ovat $r_A = 3{,}0$ cm ja $r_B = 1{,}0$ cm. Hammaspyörän B pyörimisnopeus on 96 r/s. Mikä on pyörän
a) B kehäpisteen nopeus
b) A kehäpisteen nopeus
c) A pyörimisnopeus?



2-5. Ralliauto (massa 1300 kg) ajaa pohjoiseen nopeudella 42 m/s ja kääntyy itään kuvan mukaisesti, jolloin 8,2 s:n kuluttua nopeus on 35 m/s. Laske, mikä käännöksen aikana on
a) ralliauton keskikiihtyvyys
b) ralliautoon vaikuttava keskimääräinen kokonaisvoima.



2-6. Auto, jonka massa on 1200 kg, kaartaa vaakasuoran kadunkulman ympäri 22 metrin säteistä ympyrää pitkin nopeudella 18 km/h.
a) Kuinka suuri voima tarvitaan pitämään auto tällä radalla?
b) Pysyykö auto tällä ympyräradalla, jos renkaiden ja tienpinnan välinen kitkakerroin on 0,20?

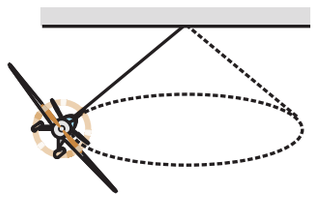
2-7. Teräspalloa, jonka massa on 55 g, pyöritetään langan päähän kiinnitettynä pitkin vaakasuoraa pöytää ympyräradalla, jonka säde on 0,20 m. Langan katkettua pallon nopeus on 15 m/s. Pallon ja pöydän välinen kitka on hyvin pieni.
a) Kuinka suuri on langan jännitys, kun lanka katkeaa?
b) Mihin suuntaan pallo lähtee radalta?

2-8. Bohrin atomimallin mukaan vetyatomin elektronin radan säde on 52,8 pm ja ratanopeus 2,18 Mm/s.
a) Kuinka suuri on elektronin normaalikiihtyvyys?
b) Kuinka monta kierrosta elektroni kiertää sekunnissa?

2-9. Elokuvassa ”007 ja Kuuraketti” agentti 007 joutuu astronauttien koulutuksessa käytettävässä kiihtyvyyssimulaattorissa (sentrifugissa) tasaiseen ympyräliikkeeseen. Laske laitteen pyörimisnopeus, kun agentin kiihtyvyys on 12*g*. Laitteen pyörimissäde on 10 m.

2-10. Kallistetun ympyräkaarteen säde on 135 m ja kallistuskulma 9,5°. Mikä on suurin nopeus, jolla auto voi ajaa kaarteen tiellä pysyen? Oletetaan autoon kohdistuvat vastusvoimat pieniksi. Kitkaa renkaiden ja tienpinnan välillä ei oteta huomioon.

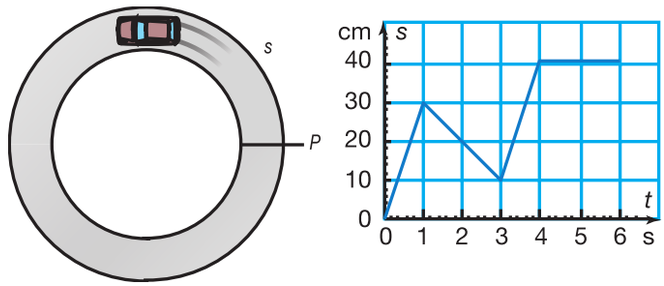
2-11. Leikkilentokone on ripustettu kattoon 0,90 m:n pitkän langan päähän. Kun koneen moottori käynnistetään, kone alkaa kiertää ympyrärataa kuvan mukaisesti.



Ympyräradan halkaisija on 1,4 m, ja lentokoneen massa on 0,200 kg.
a) Piirrä ja nimeä koneeseen kohdistuvat voimat.
b) Mikä on koneen lentonopeus?

2-12. Eeva ajaa kuntopyörällä. Harjoituksen aikana pyörän eturenkaan kulmanopeus muuttuu oheisen kuvaajan mukaisesti.
a) Mitä kuntopyörän nopeusmittari (km/h) näyttää hetkellä 5,0 min?
b) Kuinka pitkän matkan (km) Eeva ajaa harjoituksen aikana kaikkiaan kuntopyörän mittarin mukaan? Renkaan halkaisija on 26″.

2-13. Kauko-ohjattavalle leikkiautolle on tehty ympyrän muotoinen rata, jonka halkaisija on 0,40 m. Autoa ohjataan radalla siten, että sen asema *s* aloituspisteeseen *P* nähden muuttuu seuraavasti (*s* on positiivinen pisteestä *P* vastapäivään):



a) Kuvaile leikkiauton liikettä sanallisesti.
b) Määritä auton keskivauhti aikavälillä 0,0 s … 5,0 s.
c) Määritä auton nopeus hetkellä 2,0 s.
d) Miksi (*t*, *s*)-kuvaaja ei voi täysin vastata todellisuutta?

2-14. Kitkarenkaita testattaessa henkilöautolla ajettiin jäällä 30 m:n säteistä ympyrärataa maksiminopeudella.
a) Kuinka suuri oli renkaan ja jään välinen lepokitkakerroin, kun kierrosaika oli parhaimmillaan 33,5 s?
b) Eräällä kierroksella kuljettaja menetti autonsa (massa 1080 kg) hallinnan ja törmäsi nopeudella 17 km/h lähistöllä seisovaan moottorikelkkaan (massa 380 kg). Kuinka pitkän matkan auto (lukkojarrutuksessa) ja moottorikelkka liukuivat yhdessä? Renkaan ja jään välinen liukukitkakerroin oli 0,090 ja moottorikelkan ja jään välinen liukukitkakerroin 0,20. [S2002, 6]

2.3 Muuttuva ympyräliike

Jos ympyräradalla etenevän kappaleen nopeuden suuruus muuttuu, kappale on **muuttuvassa ympyräliikkeessä**. Kun kappaleen nopeuden suuruus ympyräradalla muuttuu, sillä on ns. tangenttikiihtyvyyttä. Kappaleen **tangenttikiihtyvyys** (ratakiihtyvyys) kuvaa ratanopeuden muutosta aikayksikössä.

Tangenttikiihtyvyys
Ympyräradalla olevan kappaleen tangenttikiihtyvyyden $\bar{a}_t$ suuruus on

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

jossa v on kappaleen ratanopeus. Tangenttikiihtyvyys kuvaa ratanopeuden muutosnopeutta.

Kappale on kiihtyvässä liikkeessä, jos siihen vaikuttava kokonaisvoima eroaa nollasta. Nopeuden suunnan muuttaminen vaatii nopeutta (liikesuuntaa) vastaan kohtisuoran voiman eli normaalivoiman $\overline{F}_n$. Nopeuden suuruuden muuttaminen eli liikkeen hidastaminen tai nopeuttaminen puolestaan vaatii, että kappaleeseen vaikuttaa radan tangentin suuntainen voima $\overline{F}_t$.

Voimien $\overline{F}_t$ ja $\overline{F}_n$ vektorisumma $\sum \overline{F} = \overline{F}_t + \overline{F}_n$ on kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima. Tangentin suuntaiset voimat (tai voiman komponentit) muuttavat nopeuden suuruutta ja normaalin suuntaiset voimat nopeuden suuntaa.

Normaalikiihtyvyys ja tangenttikiihtyvyys ovat kiihtyvyyden (kokonaiskiihtyvyyden) kohtisuorat komponentit. Kiihtyvyys kuvaa sekä radan kaartumista että nopeuden muuttumista.

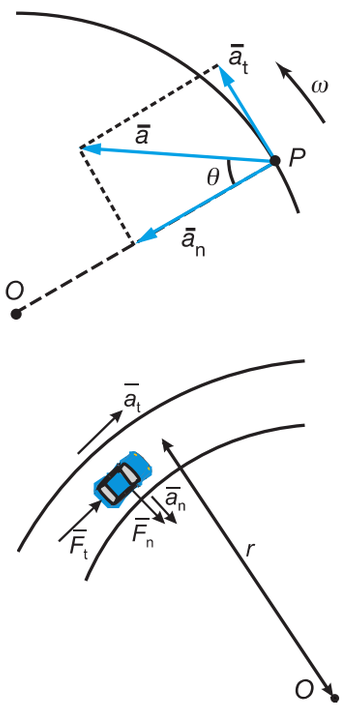
Jos ympyäradalla olevan kappaleen vauhti pysyy vakiona, kappaleella ei ole tangenttikiihtyvyyttä eli kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyttä, jonka suunta on kohti ympyäradan keskipistettä. Jos ympyäliikkeessä olevan kappaleen ratanopeus muuttuu, kappaleen kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyden ja tangenttikiihtyvyyden vektorisumma. Tällöin kiihtyvyyden (ja kokonaisvoiman) suunta ei ole ympyäradan keskipistettä kohti.

Kiihtyvyys ympyäradalla

Ympyäradalla olevan kappaleen kiihtyvyys (kokonaiskiihtyvyys) $\bar{a}$ on tangenttikiihtyvyyden $\bar{a}_t$ ja normaalikiihtyvyyden $\bar{a}_n$ vektorisumma: $\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$.

Kiihtyvyyden suuruus on $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Kiihtyvyysvektorin suuntakulma θ ympyäkaaren säteeseen nähden saadaan yhtälöstä $\tan\theta = \dfrac{a_t}{a_n}$.

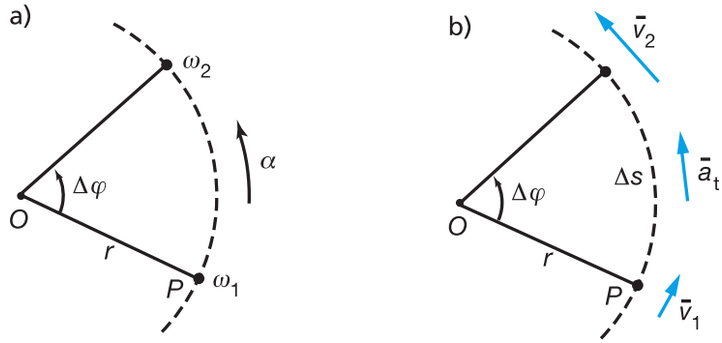


Vaakasuorassa kaarteessa muuttuvassa liikkeessä olevaan autoon kohdistuvat voimat $\bar{F}_t$ ja $\bar{F}_n$ aiheutuvat lepokitkasta, joka estää auton sivuluisun ja renkaiden sutimisen. Renkaiden sutiessa kitka on liukukitkaa.

Kappaleen tangenttikiihtyvyys saadaan muotoon

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} r = \alpha r,$$

jossa α on kulmakiihtyvyys ja r radan säde.



Kiihtyvässä liikkeessä ympyäradalla olevan massapisteen *P*
a) kulmasuureita b) ratasuureita.

Esimerkki 5

Vaatteidenkuivausrumpu, jonka säde on 0,20 m, alkaa pyöriä kulmakiihtyvyydellä 2,0 rad/s^2. Mikä on rummun kehällä olevan napin
a) tangenttikiihtyvyyden suuruus
b) normaalikiihtyvyyden suuruus
c) kiihtyvyys, kun rumpu on pyörinyt 1,0 s:n ajan?

$r = 0{,}20$ m, $\quad \alpha = 2{,}0$ rad/s^2, $\quad \Delta t = 1{,}0$ s

a) Tangenttikiihtyvyyden suuruus on

$$a_\mathrm{t} = \alpha r = 2{,}0\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}20\ \mathrm{m} = 0{,}40\ \mathrm{m/s}^2.$$

Tangenttikiihtyvyyden suuruus on 0,40 m/s^2.

b) Lasketaan ensin tasaisesti kiihtyvän pyörimisliikkeen kulmanopeus ω tarkasteluhetkellä. Koska rumpu lähtee liikkeelle levosta ja kulmakiihtyvyys on α, rummun kulmanopeus hetkellä 1,0 s on

$$\omega = \alpha t = 2{,}0\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}0\ \mathrm{s} = 2{,}0\ \mathrm{rad/s}.$$

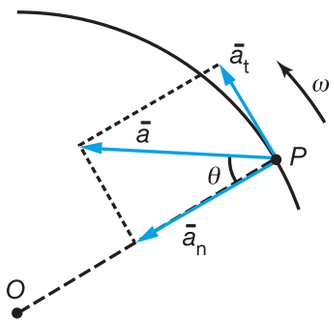
Normaalikiihtyvyyden suuruus on silloin

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r = \left(2{,}0\,\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 0{,}20\ \mathrm{m} = 0{,}80\ \mathrm{m/s}^2.$$

Normaalikiihtyvyyden suuruus on 0,80 m/s^2. Huomaa, että normaalikiihtyvyys riippuu napin ratanopeudesta mutta tangenttikiihtyvyys on vakio.

c) Napin kiihtyvyys on $\vec{a} = \vec{a}_\mathrm{t} + \vec{a}_\mathrm{n}$. Kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = \sqrt{\left(0{,}40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2 + \left(0{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2} \approx 0{,}89\ \mathrm{m/s}^2.$$



Kiihtyvyyden suuntakulma θ saadaan yhtälöstä

$$\tan\theta = \frac{a_\mathrm{t}}{a_\mathrm{n}} = \frac{0{,}40\ \mathrm{m/s}^2}{0{,}80\ \mathrm{m/s}^2} = 0{,}50, \ \text{josta}\ \theta \approx 27°.$$

Kokonaiskiihtyvyys on 0,89 m/s^2, ja kiihtyvyyden suuntakulma ympyräradan säteeseen nähden on 27°.

Esimerkki 6

Henkilöauto kiihdyttää nopeuttaan kallistamattomassa liikenneympyrässä siten, että auton nopeus kasvaa tasaisesti arvosta 25 km/h arvoon 40 km/h 2,8 sekunnissa. Auton ja siinä olevien matkustajien yhteismassa on 1300 kg ja liikenneympyrän säde 29 m.
a) Määritä autoon kohdistuvan kokonaisvoiman suuruus ja suunta auton liikesuuntaan nähden hetkellä, jolloin auton nopeus on 35 km/h.
b) Minkä ulkoisten voimien summa kokonaisvoima on? [K1999, 6]

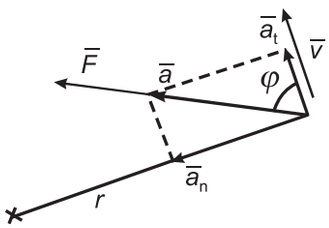
$v_1 = 25$ km/h, $v_2 = 40$ km/h, $\Delta t = 2{,}8$ s, $r = 29$ m,
$m = 1300$ kg, $v = 35$ km/h

a) Autoon kohdistuva kokonaisvoima on $\overline{F} = m\overline{a}$ ja auton kiihtyvyys $\overline{a} = \overline{a}_\mathrm{t} + \overline{a}_\mathrm{n}$. Auton nopeus kasvaa tasaisesti, joten sen tangenttikiihtyvyyden suuruus on

$$a_\mathrm{t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\frac{40}{3{,}6}\ \mathrm{m/s} - \frac{25}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}}{2{,}8\ \mathrm{s}} \approx 1{,}4881\ \mathrm{m/s^2}.$$

Ajettaessa nopeudella 35 km/h auton normaalikiihtyvyyden suuruus on

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{35}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}\right)^2}{29\ \mathrm{m}} \approx 3{,}2594\ \mathrm{m/s^2}.$$



Auton kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \sqrt{{a_\mathrm{t}}^2 + {a_\mathrm{n}}^2}$$
$$= \sqrt{(1{,}4881\ \mathrm{m/s^2})^2 + (3{,}2594\ \mathrm{m/s^2})^2} \approx 3{,}5830\ \mathrm{m/s^2}.$$

Autoon kohdistuva kokonaisvoiman suuruus on

$$F = ma = 1300\ \mathrm{kg} \cdot 3{,}5830\ \mathrm{m/s^2} \approx 4{,}7\ \mathrm{kN}.$$

Voiman suunta on sama kuin kiihtyvyyden, joten

$$\tan\varphi = \frac{a_\mathrm{n}}{a_\mathrm{t}} = \frac{3{,}2594\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}4881\ \mathrm{m/s^2}}, \text{ josta kulma } \varphi \approx 65°.$$

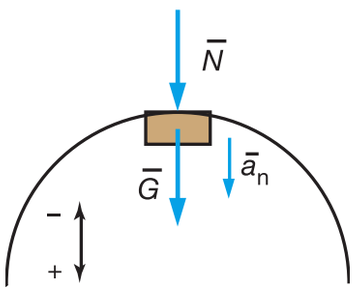
Autoon kohdistuva koonaisvoima on 4,7 kN ja suunta 65° kuvan mukaisesti.

b) Autoon kohdistuva kokonaisvoima on tien aiheuttaman tukivoiman, autoon kohdistuvan painon, renkaiden ja tien välisen lepokitkan, vierimisvastuksen ja ilmanvastuksen vektorisumma eli $\sum \bar{F} = \bar{N} + \bar{G} + \bar{F}_\mu + \bar{F}_\mathrm{v} + \bar{F}_\mathrm{i}$. Pystysuorassa suunnassa vaikuttavat tien tukivoima ja autoon kohdistuva paino kumoavat toisensa. Auton kiihtyvyyden aiheuttavat lepokitka, vierimisvastus ja ilmanvastus, jotka vaikuttavat tien suunnassa.

Esimerkki 7

a) Kuinka korkealta vuoristoradan junan pitäisi lähteä, että se matkan aikana voisi tehdä potentiaalienergiansa turvin ympyränmuotoisen silmukan, jonka säde on 5,0 m? Kitka ja ilmanvastus ovat vähäiset.
b) Laske voima, joka ympyäradan alimmassa kohdassa kohdistuu vaunussa istuvaan Annaan, jonka massa on 36 kg.

$r = 5{,}0\ \mathrm{m}, \quad g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}, \quad m = 36\ \mathrm{kg}$



a) Tarkastellaan junaa silmukan ylimmässä kohdassa. Junan liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_\mathrm{n}$ eli $\bar{N} + \bar{G} = m\bar{a}_\mathrm{n}$. Kun suunta alas valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $N + mg = m\dfrac{v^2}{r}$.

Kun juna pysyy radan korkeimmassa kohdassa juuri ja juuri ympyäradalla, se painautuu vain hyvin vähän rataa vasten eli tukivoima N on hyvin pieni; rajatapauksessa tukivoima N on nolla. Yhtälöstä $mg = m\dfrac{v^2}{r}$ junan nopeudeksi radan ylimmässä pisteessä saadaan $v = \sqrt{gr}$.

Sovelletaan silmukan ylimpään kohtaan mekaanisen energian säilymislakia $E_\mathrm{p,a} + E_\mathrm{k,a} = E_\mathrm{p,l} + E_\mathrm{k,l}$. Lähtökorkeudella junalla on vain potentiaalienergiaa, silmukan ylimmässä kohdassa liike- ja potentiaalienergiaa. Saadaan yhtälö $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2 + mg2r$, jossa v on junan nopeus silmukan ylimmässä pisteessä. Sijoitetaan nopeus $v = \sqrt{gr}$ mekaanisen energian säilymislain yhtälöön:

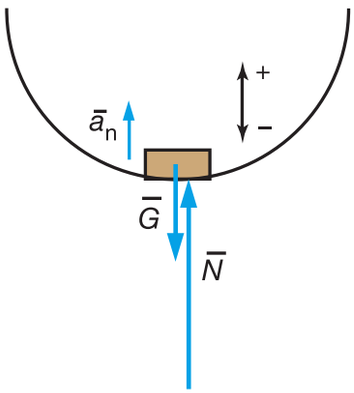
$$mgh = \frac{1}{2}m(\sqrt{gr})^2 + mg2r$$

$$mgh = \frac{1}{2}mgr + mg2r.$$

Junan lähtökorkeudeksi saadaan

$$h = \frac{1}{2}r + 2r = 2\frac{1}{2}r = 2\frac{1}{2} \cdot 5{,}0 \text{ m} = 12{,}5 \text{ m}.$$

Koska silmukan halkaisija on 10,0 m, lähtötason pitäisi olla vähintään 2,5 m silmukan ylimmän kohdan yläpuolella, jotta silmukka voidaan ajaa turvallisesti.



b) Lasketaan ensin vaunun nopeus radan alimmassa kohdassa. Kun vaunu lähtee korkeudelta $h = 12{,}5$ m, mekaanisen energian säilymislaista $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ saadaan vaunun nopeudeksi

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 12{,}5 \text{ m}} \approx 15{,}6605 \text{ m/s}.$$

Annan liikeyhtälö radan alimmassa kohdassa on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_n$. Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, skalaariyhtälöstä $N - G = \frac{mv^2}{r}$ saadaan vaunusta Annaan kohdistuvaksi tukivoimaksi

$$N = G + \frac{mv^2}{r} = mg + \frac{mv^2}{r}$$
$$= 36 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 + \frac{36 \text{ kg} \cdot (15{,}6605 \text{ m/s})^2}{5{,}0 \text{ m}} \approx 2100 \text{ N}.$$

Annaan kohdistuva voima on 2100 N. Se on noin 6-kertainen Annaan kohdistuvaan painoon verrattuna.

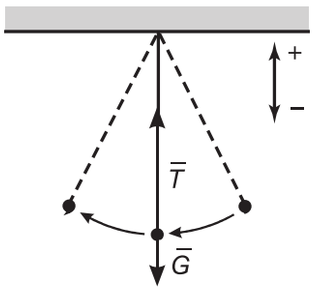
Oppilastyö ▪ Surmansilmukka

Rakenna leikkiautorataan silmukka. Hae kokeilemalla kohta, josta kuulan on lähdettävä, jotta se juuri ja juuri selvittää radan. Vertaa lähtökorkeutta silmukan läpimittaan.

Esimerkki 8

Matemaattisella heilurilla tarkoitetaan painottoman langan päässä riippuvaa pistemäistä kappaletta. Heilurin langan pituus on 1,0 m ja langan päähän ripustetun punnuksen massa 0,250 kg. Heiluri tönäistään heilahtelemaan, ja sen ohittaessa alimman asemansa heilurin langan jännitysvoimaksi mitataan 15 N.
a) Laske alimmassa kohdassa punnuksen hetkellinen nopeus ja kiihtyvyys.
b) Laske ääriasemassa punnuksen kiihtyvyys. Ääriasemassa heiluri on heilahtanut pystysuunnasta mitattuna kulmaan 37°.

$r = 1{,}0\ \text{m}, \quad m = 0{,}250\ \text{kg}, \quad T = 15\ \text{N}, \quad g = 9{,}81\ \text{m/s}^2,$
$\theta = 37°$



a) Punnus on ympyräradalla. Punnuksen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$. Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$$T - G = ma_\text{n} \text{ eli } T - G = \frac{mv^2}{r}.$$

Yhtälöstä saadaan punnuksen hetkelliseksi nopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{r(T-G)}{m}} = \sqrt{\frac{1{,}0\ \text{m} \cdot (15\ \text{N} - 0{,}250\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2)}{0{,}250\ \text{kg}}}$$
$$= 7{,}08449\ \text{m/s} \approx 7{,}1\ \text{m/s}.$$

Alimmassa asemassa punnuksen nopeus on suurin.

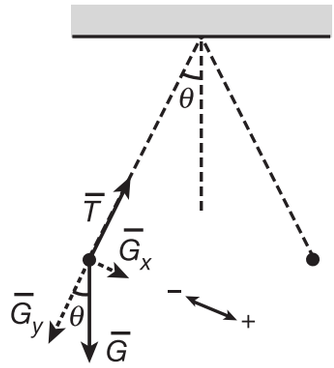
Trapetsitaiteilijan liike on muuttuvaa ympyräliikettä. Vaijerin jännitysvoiman suuruus vaihtelee heilahduksen aikana.

Alimmassa asemassa punnuksen liike vaihtuu kiihtyvästä hidastuvaksi, joten tangenttikiihtyvyys a_t on hetkellisesti nolla. Punnuksella on alimmassa asemassa vain ylöspäin radan keskipisteeseen suuntautuvaa normaalikiihtyvyyttä:

$$a_\text{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{(7{,}08449\ \text{m/s})^2}{1{,}0\ \text{m}} \approx 50\ \text{m/s}^2.$$

Alimmassa kohdassa punnuksen nopeus on 7,1 m/s ja kiihtyvyys 50 m/s^2. Kiihtyvyyden suunta on kohti radan keskipistettä.

b) Ääriasemassa punnuksen ratanopeus on hetkellisesti nolla, joten normaalikiihtyvyys on nolla. Tällöin punnuksen kiihtyvyys on tangenttikiihtyvyyttä. Valitaan suunta vinosti alas positii-



viseksi. Tällöin liikeyhtälö $\sum \overline{F} = m\overline{a}_t$ saadaan skalaarimuotoon $G_x = ma_t$ eli $mg \sin\theta = ma_t$. Tangenttikiihtyvyyden suuruus on

$$a_t = g \sin\theta = 9{,}81\text{m/s}^2 \cdot \sin 37° \approx 5{,}9\ \text{m/s}^2.$$

Punnuksen kiihtyvyys on 5,9 m/s^2, suunta radan tangentin suunta.

Oppilastyö ▪ Maapallon litistymisen osoittaminen sähköporan avulla

Kiinnitä sähköporaan joustavista metalliliuskoista valmistettu pyörintäpallo. Käynnistä pora ja suurenna pyörimisnopeutta. Tarkkaile metalliliuskoista muodostuneen kappaleen muotoa.

Kulmanopeus on pieni.

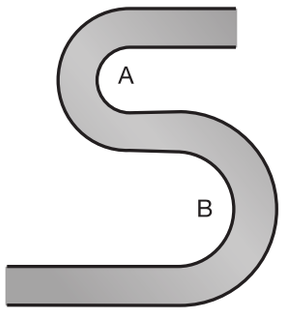
Kulmanopeus on suuri. Massan hitaus aiheuttaa pallon litistymisen. Myös maapallo on navoiltaan litistynyt.

Tässä on hyvä paikka harjoitella käytännössä tangenttikiihtyvyyttä ja normaalikiihtyvyyttä.

Kun pora pannaan pyörimään, metalliliuskojen keskiosat kohoavat ja asettuvat radalle, jossa liuskojen rakenteen aiheuttama, pyörimisakselia kohti suuntautuva voima sekä radan säde ja liuskan ratanopeus vastaavat toisiaan. Toisin sanoen liuskojen jokainen massa-alkio noudattaa liikeyhtälöä $\sum F = ma_n = \frac{mv^2}{r}$. Kun poran pyörimisnopeus kasvaa, pallo litistyy, sillä silloin liikeyhtälön toteutuminen vaatii suuremman normaalivoiman. Litistyneessä pallossa liuskan rakenteen aiheuttama voima suuntautuu suuremmassa määrin pyörimisakselia kohti kuin pyöreämmässä pallossa. Liuskapallon tavoin maapallokaan ei ole täysin kiinteä kappale. Sen takia pyöriminen saa maapallonkin hieman pullistumaan keskikohdaltaan ja litistymään navoiltaan.

2-15. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? Perustele vastauksesi.
a) Tasaisessa ympyräliikkeessä normaalikiihtyvyyden suunta on kohti radan keskipistettä.
b) Kun autolla ajetaan vaakasuorassa kaarteessa, normaalikiihtyvyyden aiheuttaa renkaiden ja tienpinnan välinen lepokitka.
c) Jos tietä kallistetaan hieman, tiellä pysymiseen tarvittava kitka pienenee.
d) Kun auton nopeutta pienennetään kaarteessa, tien ja auton renkaiden välinen kitka pienenee.

2-16. Kuvassa on esitetty suljetulla moottoriradalla oleva S-mutka. Kilpailija ajaa mutkan vakiovauhdilla.

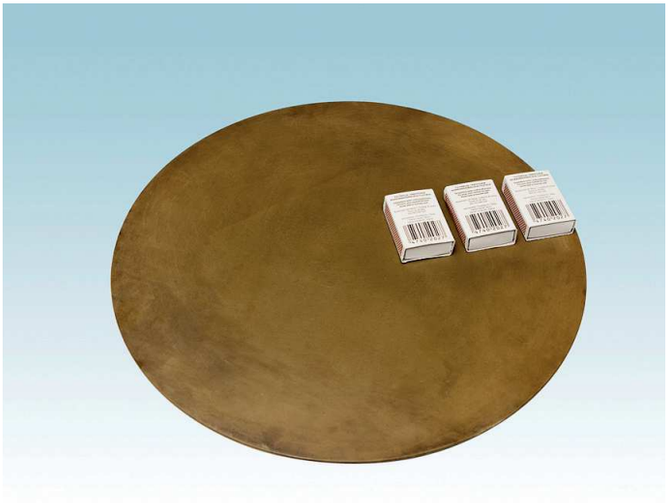


a) Kummassa mutkassa autoon ja kuljettajaan vaikuttava normaalikiihtyvyys on suurempi?
b) Piirrä S-mutkaan liittyen ajoreitti, jossa autoon (ja kuljettajaan) kohdistuu pienin mahdollinen normaalikiihtyvyys.

2-17. Kappaleen pitämiseksi ympyräradalla tarvitaan aina voima. Mikä voima pitää seuraavat kappaleet radallaan:
a) Maa, joka kiertää Auringon ympäri
b) Anna, joka istuu leikkipuiston karusellissa
c) elektroni, joka kiertää atomiydintä
d) F1-auto, joka ajaa kaarretta
e) Tarzan, joka heilauttaa itsensä liaanin avulla puusta toiseen
f) ovenkahva, kun ovea työnnetään kiinni?

2-18. Kappale liikkuu ympyräradalla. Perustele, mitkä seuraavista väitteistä ovat oikeita ja mitkä vääriä:
a) Kappaleen nopeusvektori on kohtisuorassa sädettä vastaan.
b) Kappaleen kiihtyvyys voi olla nolla.
c) Kappaleen kiihtyvyys on vakio, kun kappale on tasaisesti kiihtyvässä ympyräliikkeessä.
d) Kappaleen tangenttikiihtyvyys voi olla suurempi kuin normaalikiihtyvyys.
e) Kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima suuntautuu aina ympyräradan keskipisteeseen.
f) Kappaleen kiihtyvyysvektori voi olla likimain vastakkaissuuntainen nopeusvektorille.
[K2002,6]

2-19. Kuvan levossa olevan levyn päällä on kolme samanlaista tulitikkulaatikkoa. Levy alkaa pyöriä, jolloin tulitikkulaatikot ovat ympyräliikkeessä. Levyn pyörimisnopeutta lisätään vähitellen. Tulitikkulaatikot pysyvät ympyräradalla kitkan takia. Levyllä olevan tulitikkulaatikon liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, jossa tulitikkulaatikon kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyden ja tangenttikiihtyvyyden vektorisumma: $\overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_t$. Mikä tulitikkulaatikoista irtoaa ensimmäisenä ympyräradalta?



Tehtäviä

2-20. Ossi on kalastamassa.
a) Laske virvelin kelan puolan kulmanopeus ja pyörimisnopeus, kun koukussa oleva hauki vetää siimaa täysinäiseltä kelalta tasaisesti nopeudella 1,2 m/s. Kelan halkaisija on 4,5 cm.
b) Laske kelan tangenttikiihtyvyys, kun hauki nykäisee voimakkaasti ja kelan pyörimisnopeus kaksinkertaistuu 1,4 s:n aikana.

2-21. Hiomalaikka, jonka halkaisija on 0,20 m, lähtee levosta pyörimään kulmakiihtyvyydellä 3,5 rad/s^2.
a) Kuinka kauan kestää, ennen kuin laikka saavuttaa kierrostaajuuden 40 r/s?
b) Kuinka monta kierrosta laikka ehtii tässä ajassa pyöriä?
c) Kuinka suuri on laikan kehäpisteen nopeus, kun kierrostaajuus 40 r/s on saavutettu?

2-22. Kun sähköllä toimiva keraamikon dreija kytketään päälle, kierrostaajuus 33,3 r/min saavutetaan noin 2,9 sekunnin kuluttua. Levyn päällä, 5,8 cm:n etäisyydellä pyörimisakselista, on savihiukkanen. Laske savihiukkasen
a) kulmakiihtyvyys
b) ratanopeus
c) kiihtyvyys
1,5 sekuntia alun jälkeen.

2-23. Pyörä, jonka säde on 0,30 m, on tasaisesti kiihtyvässä pyörimisliikkeessä. Alussa pyörän kulmanopeus on 6,0 rad/s ja lopussa, 2,0 s myöhemmin, 2,0 rad/s. Mikä on pyörän
a) kulmakiihtyvyys
b) kehällä olevan pisteen kiihtyvyys lopussa?

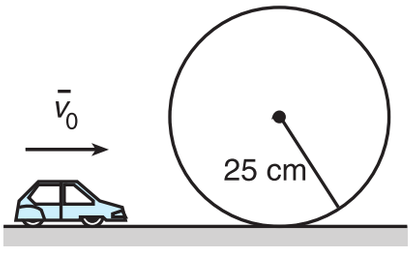
2-24. Ralliautoilija ajaa mäennyppylälle, joka on säteeltään 45-metrisen ympyränkaaren muotoinen. Kuinka suurella nopeudella ajettaessa auto irtoaa tienpinnasta?

2-25. Kumparelaskija tulee ympyrän muotoisen rinteenosan alimpaan kohtaan nopeudella 45 km/h. Rinteen kaarevuussäde tässä kohden on 22 m. Laskijan kokonaismassa on 82 kg. Kuinka suuri voima rinteestä kohdistuu laskijan suksenpohjiin?

2-26. Lentäjä tekee pystytasossa ympyräsilmukan. Silmukan säde on 1,00 km ja koneen vauhti koko silmukan ajan 360 km/h. Lentäjän massa on 85 kg.
a) Piirrä lentäjään kohdistuvat voimat silmukan ylimmässä (kone ylösalaisin) ja alimmassa pisteessä.
b) Kuinka suurella voimalla istuin vaikuttaa lentäjään radan alimmassa kohdassa?

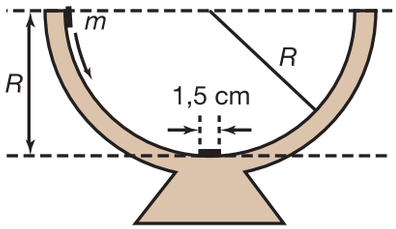
2-27. Millä nopeudella täyttä vesisankoa pitää pyörittää pystytasossa, jotta vesi ei putoa sangosta?

2-28. Kuinka suuri vaakasuora nopeus v_0 täytyy herkkäliikkeiselle leikkiautolle antaa, jotta auto selviää oheisen kuvan mukaisesta ympyräsilmukasta? Piirrä periaatekuvio silmukan ylimmässä pisteessä olevaan autoon vaikuttavista voimista myös siinä tapauksessa, että autolle onkin annettu alkunopeus $2v_0$.

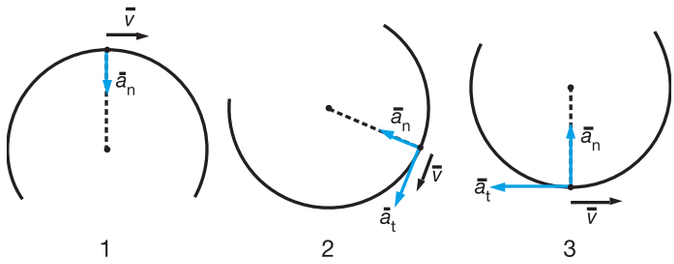


2-29. Opiskelijat suorittavat kokeen puolipallon muotoisen ($R = 25$ cm) maljan avulla. Eräs opiskelijoista asettaa kolikon ($m = 25$ g) maljan reunalle ja päästää sen irti. Kolikko liukuu kitkatta maljan sisäpintaa pitkin.

a) Kuinka korkealle kolikko nousee maljan vastakkaisella puolella?
b) Mikä on kolikkoon maljan pohjalla vaikuttava tukivoima?
[Turun, Helsingin, Oulun ja Jyväskylän yliopisto 2002 (osa)]



2-30. Kappale etenee pitkin ympyrärataa.
a) Minkälaista on kappaleen liike seuraavissa tapauksissa?
b) Piirrä kuviin kiihtyvyysvektori.



2-31. Moottorikelkka ajaa vaakasuoraa ympyräkaarretta tasaisesti kiihdyttäen siten, että kelkan vauhti kasvaa 15 s:n aikana arvosta 30 km/h arvoon 80 km/h. Kaarevuussäde on 75 m.
a) Laske kelkan tangenttikiihtyvyyden suuruus.
b) Laske kelkan normaalikiihtyvyyden suuruus kiihdytyksen alussa.
c) Laske kelkan normaalikiihtyvyyden suuruus kiihdytyksen lopussa.
d) Piirrä kuvio, josta ilmenee kelkan kiihtyvyys kiihdytyksen alussa ja lopussa.

2-32. Ympyräradalla ajava moottoripyöräilijä hidastaa vauhtiaan tasaisesti siten, että eräällä hetkellä ratanopeus on 12,5 m/s ja puoli kierrosta myöhemmin 2,5 m/s. Rataympyrän säde on 34 m. Laske moottoripyörän kiihtyvyys (suuruus ja suunta nopeusvektoriin nähden) sillä hetkellä, kun sen ratanopeus on 7,5 m/s. [K2004, 6]

2-33. Auton vaakasuora nopeus on eräällä hetkellä 60 km/h suoraan pohjoiseen. Millä edellytyksellä (tien muoto, kaarevuussäde, kuljettajan toiminta) auton kiihtyvyys voi tällöin olla
a) 0,95 m/s^2 suoraan länteen
b) 2,1 m/s^2 suoraan kaakkoon
c) 1,7 m/s^2 suoraan ylöspäin? [S2001, 6]

2-34. Lyijykuula, jonka massa on 0,32 kg, riippuu ohuen langan varassa. Systeemi poikkeutetaan tasapainoasemastaan 55° ja päästetään heilumaan.
a) Laske lankaa jännittävä voima kuulan sivuuttaessa tasapainoasemansa.
b) Laske kuulan kiihtyvyys tasapainoasemassa ja ääriasemassa.

Testaa, osaatko

Oikeita vastausvaihtoehtoja voi olla yksi tai useampia.

1. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?
a) Kappale on ympyräliikkeessä, jos se etenee pitkin ympyrärataa.
b) Ympyräliikkeessä tarkastellaan kappaleen paikan muuttumista.
c) Maailmanpyörän korin liike on ympyräliikettä.

2. Ympyräradalla olevan kappaleen ratanopeus
a) riippuu radan säteen suuruudesta
b) on sitä suurempi, mitä suurempi säde on
c) on kohtisuorassa radan sädettä vastaan.

3. Mitkä seuraavista väitteistä ovat totta?
a) Jos kappale on kiihtyvässä liikkeessä, sen synnyttämiseen tarvitaan voima.
b) Normaalikiihtyvyys kuvaa kappaleen nopeuden suunnan muutosnopeutta.
c) Tangenttikiihtyvyys kuvaa ratanopeuden muutosnopeutta.

4. Tasaisessa ympyräliikkeessä olevan kappaleen normaalikiihtyvyys on sitä suurempi, mitä
a) suurempi on ratakäyrän säde
b) pienempi on ratakäyrän säde
c) suurempi on kappaleen ratanopeus.

5. Ympyräradalla olevan kappaleen tangenttikiihtyvyys
a) riippuu kappaleen ratanopeuden muutoksesta
b) kuvaa ratanopeuden muutosnopeutta
c) voi olla vastakkaissuuntainen ratanopeudelle.

6. Kappaleen pyörimiseen liittyvistä suureista etenemisliikkeen kiihtyvyyttä a vastaa
a) kulmakiihtyvyys α
b) normaalikiihtyvyys a_n
c) tangenttikiihtyvyys eli ratakiihtyvyys a_t.

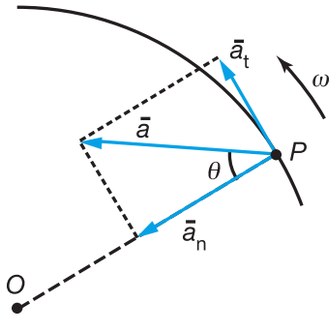
7. Ympyrärataa pitkin ajavalla moottoripyörällä on kiihtyvyyttä, kun
a) pyörää kiihdytetään
b) pyörä on tasaisessa ympyräliikkeessä
c) pyörää jarrutetaan.

8. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?
a) Tangenttikiihtyvyyden suunta on aina hetkellisen nopeuden suunta.
b) Tangenttikiihtyvyys liittyy ratanopeuden itseisarvon muutokseen.
c) Tangenttikiihtyvyys liittyy nopeuden suunnan muutokseen.

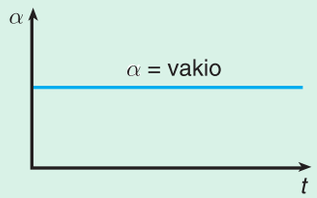
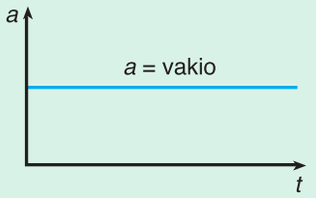
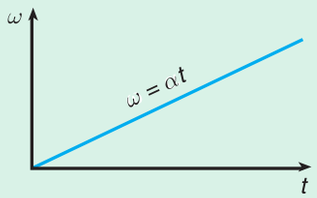
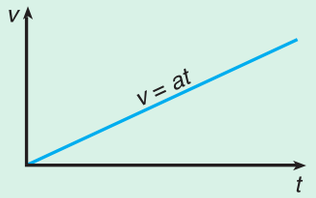
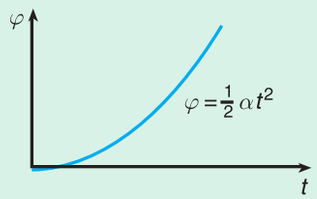
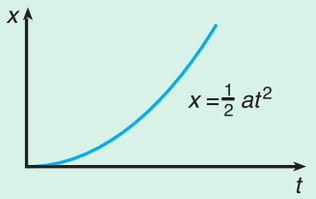
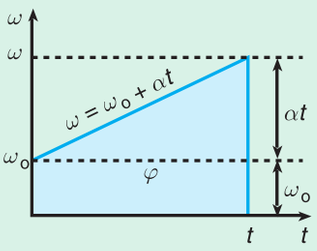
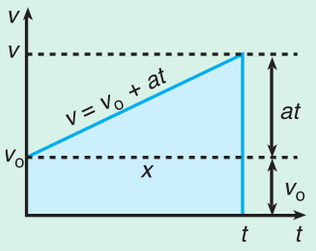
9. Polkupyörän pinnan keskelle kiinnitetään pieni nappi matkamittaria varten. Kun pyörällä ajetaan, napin ja venttiilin
a) kulmanopeudet ovat samat
b) ratanopeudet ovat samat
c) kierrostaajuudet ovat samat.

10. Ympyräradalla olevan kappaleen nopeus pienenee. Tällöin
a) kappaleella on ainoastaan normaalikiihtyvyyttä
b) tangenttikiihtyvyys on nopeusvektorin suuntainen
c) tangenttikiihtyvyys on nopeusvektorin suuntaa vastaan.

Tiivistelmä



- Ympyräliike on etenemistä ympyrärataa pitkin.
- Ympyräradalla olevan kappaleen kiihtyvyys (kokonaiskiihtyvyys) $\bar{a}$ on komponenttien $\bar{a}_t$ ja $\bar{a}_n$ vektorisumma: $\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$. Kiihtyvyyden suuruus on $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, jossa normaalikiihtyvyys on $a_n = \dfrac{v^2}{r}$ ja tangenttikiihtyvyys $a_t = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$. Kiihtyvyysvektorin suuntakulma θ ympyräkaaren säteeseen nähden saadaan yhtälöstä $\tan\theta = \dfrac{a_t}{a_n}$.
- Etenemisliikkeen ja pyörimisliikkeen yhtälöt ovat samankaltaisia.

	Pyörimisliike	Yhteys	Etenemisliike	
	kulma φ	$x = r\varphi$	paikka x	
	kulmanopeus $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$	$v = \omega r$	nopeus $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$	
	kulmakiihtyvyys $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$a_t = \alpha r$	kiihtyvyys $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$	
	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\varphi = \dfrac{\omega_0 + \omega}{2} t = \omega_k t$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$		$v = v_0 + at$ $x = \dfrac{v_0 + v}{2} t = v_k t$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	

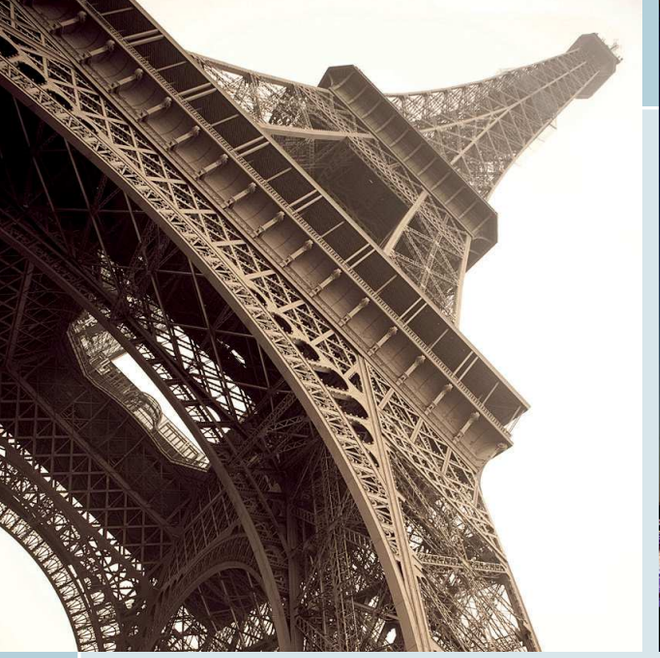
3 Jäykän kappaleen mekaniikka

Tässä luvussa opit

- voiman vääntövaikutuksen
- jäykän kappaleen tasapainoehdot
- tasapainolajit.

Keskeisiä käsitteitä ovat

- voiman varsi ja momentti
- painopiste ja massakeskipiste
- tasapaino.



Johdanto statiikkaan

Statiikka (kreik. *statike* 'tasapainotus') on mekaniikan osa-alue, jossa tutkitaan tasapainossa olevia kappaleita ja niiden tasapainoon liittyviä ehtoja. **Tasapainokysymykset ovat statiikan tyypillisiä ongelmia.**

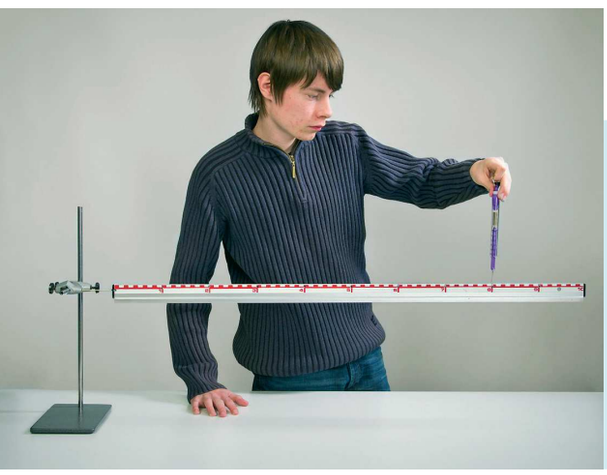
Sillat, rakennukset ja padot ovat tasapainossa olevia kappaleita, joiden osiin kohdistuu erilaisia voimia. Sillan tukipylväiden ja vaijerien rakenteet on suunniteltava siten, että silta kestää sekä liikenteen että luonnonvoimien, kuten veden ja tuulen, aiheuttamat rasitukset. Rakenteiden suunnittelussa on otettava huomioon myös alustan lujuus. Jotta rakenteet, esimerkiksi lentokoneen siivet, saadaan kestäviksi, lujuuslaskelmat on pystyttävä tekemään oikein. Urheilulääketieteen tutkimuksissa sovelletaan statiikan lakeja, kun tutkitaan esimerkiksi jalkaan ja käteen erilaisissa rasitustilanteissa kohdistuvia rasitusvoimia.

Statiikassa voimat jaetaan usein **kuormittaviin** ja **tasapainottaviin voimiin.** Tukipintaa kuormittavia voimia ovat tukipinnalla olevaan kappaleeseen kohdistuvasta painosta aiheutuva kuorma ja mahdolliset muut tukipintaan vaikuttavat voimat. Esimerkiksi siltaa kuormittavia voimia ovat siltaan itseensä kohdistuva paino sekä sillalla kulkevista ajoneuvoista ja tuulesta aiheutuvat voimat. Maan, sillan tukipilarien ja riippusillan vaijerien siltaan kohdistamat voimat ovat tasapainottavia voimia.

Kuvan rakennuksessa on jouduttu ottamaan huomioon mm. tuulen, lämpötilan ja hiekkapölyn vaikutukset.

3.1 Voiman momentti

Ovi on helppo avata, kun ovenkahva on kiinnitetty kauaksi saranoista. Auton nostaminen esimerkiksi rengasta vaihdettaessa helpottuu, kun auton tunkissa on pitkä varsi. Kiinni juuttunut pultti, kuten autonrenkaan vanteen kiinnityspultti, on helpompi avata pitkävartisella rengasavaimella. Kirjan, hillopurkin ja silmien avaamisessa, raajojen koukistamisessa sekä pään kääntämisessä on kyse voiman vääntövaikutuksesta.

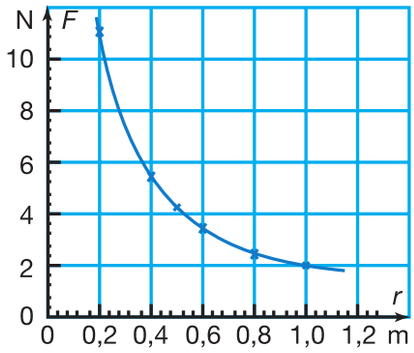


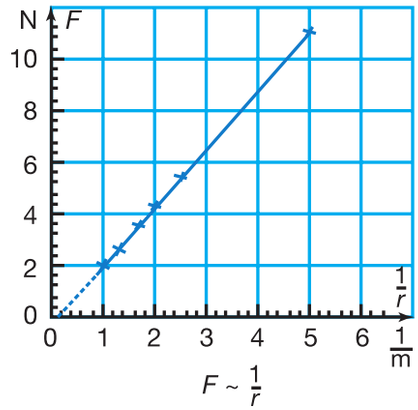
Oppilastyö ▪ Voiman vääntövaikutus

Ripusta pitkä tauluviivain toisesta päästään statiivitankoon. Kannattele viivainta vaaka-asennossa jousivaa'alla tai tietokoneeseen kytketyllä voima-anturilla. Merkitse taulukkoon jousivaa'an lukema eli tarvittavan tasapainottavan voiman suuruus ja etäisyys ripustuspisteestä. Toista mittaus muuttamalla ripustuspisteen paikkaa.

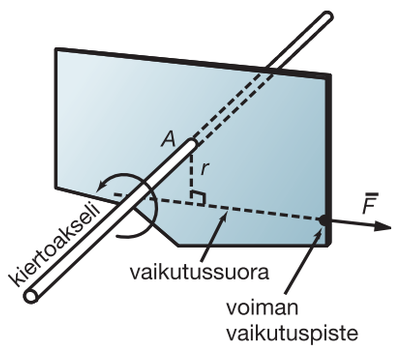
r/m	*F*/N
1,0	2,0
0,8	2,5
0,6	3,5
0,5	4,2
0,4	5,5
0,2	11,0

Taulukoiduista arvoista havaitaan, että kun ripustuspisteestä eli **kiertoakselista** mitattu etäisyys r pienenee, tasapainottava voima $\overline{F}$ suurenee. Esitetään mittaustulokset (r, F)-koordinaatistossa. Koska näyttää siltä, että etäisyys ja voima ovat kääntäen verrannollisia, esitetään mittaustulokset vielä $(1/r, F)$-koordinaatistossa.





Mittauspisteet asettuvat $(1/r, F)$-koordinaatistossa likimain origon kautta kulkevalle suoralle. Näin ollen jousivaa'an viivaimeen kohdistama tasapainottava kosketusvoima on suoraan verrannollinen kiertoakselista mitatun etäisyyden käänteisarvoon: $F \sim \frac{1}{r}$ eli $F = \text{vakio} \cdot \frac{1}{r}$. Tämän suoran fysikaalista kulmakerrointa $(1/r,\ F)$-koordinaatistossa nimitetään voiman **momentiksi** ***M***. Suoran yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $F = M \cdot \frac{1}{r}$, josta saadaan $M = Fr$.



Jos voiman vaikutuspistettä siirretään sen vaikutussuoralla, voiman vaikutus jäykkään kappaleeseen ei muutu.

Voiman momentti
Voiman $\overline{F}$ momentti akselin suhteen on

$$M = Fr,$$

jossa r on voiman vaikutussuoran kohtisuora etäisyys kiertoakselista (momenttiakselista). Tätä etäisyyttä r nimitetään voiman varreksi eli momenttivarreksi.
Voiman momentti kuvaa voiman vääntövaikutusta.

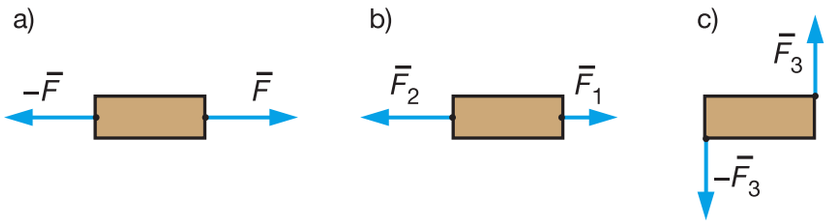
Voiman momentti ilmaisee voiman kierto- eli vääntövaikutuksen jonkin akselin suhteen. Momentin suuruuteen vaikuttavat käytettävän voiman suuruus ja voiman varren pituus. Jos voima on vakio, voiman vääntövaikutusta voidaan lisätä kasvattamalla voiman vartta.

Voiman momentin yksikkö on
$[M] = [F][r] = 1\ \text{N} \cdot 1\ \text{Mm} = 1\ \text{Nm}$.

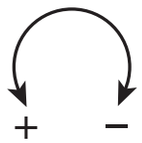
Momentilla ja energialla on sama yksikkö Nm. Energian yhteydessä tästä käytetään nimitystä joule (J), mutta momentista puhuttaessa joule-nimitystä ei tule käyttää.

Miksi vene pyrkii kääntymään, jos soudat toisella airolla voimakkaammin?

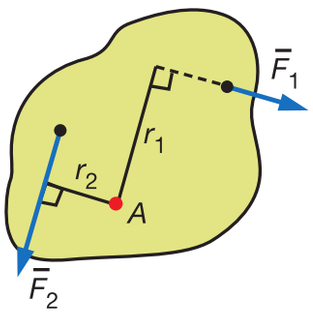
Kappaleen liike ja liikkeen muuttuminen riippuvat kappaleeseen kohdistuvista voimista ja voimien sijainnista toisiinsa nähden. Alla olevissa piirroksissa on muutamia esimerkkejä. Kappale on aluksi levossa, ennen kuin voimat alkavat vaikuttaa siihen.



Kuvassa a kappaleeseen kohdistuvat kaksi yhtä suurta voimaa ovat samalla vaikutussuoralla ja vaikuttavat vastakkaisiin suuntiin. Kokonaisvoima on nolla, joten kappale on levossa. Kuvassa b kaksi erisuurta voimaa ovat samalla vaikutussuoralla. Voima $\bar{F}_2$ on suurempi kuin $\bar{F}_1$, joten kappale lähtee kiihtyvään suoraviivaiseen liikkeeseen vasemmalle. Kuvassa c kappaleeseen kohdistuvien voimien summa on nolla, joten kappale on etenemisen suhteen levossa. Koska voimien vaikutussuora ei ole sama, voimilla on vääntövaikutus: kappale alkaa pyöriä.



Yleensä sovitaan, että **voiman momentti on positiivinen, jos voiman kiertovaikutus on vastapäivään**, ja negatiivinen, jos voiman kiertovaikutus on myötäpäivään. Tällöin suunnat tarkoittavat kiertosuuntia katselijan suunnasta nähtynä. Huomaa, että pyörimisen suunta riippuu katselusuunnasta.

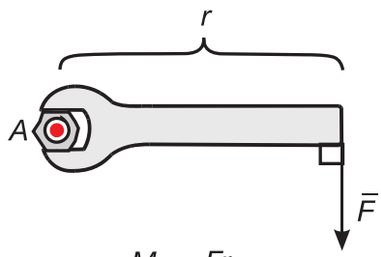


Kappale on tasapainossa, jos $\sum M_A = 0$ eli $-F_1r_1 + F_2r_2 = 0$.

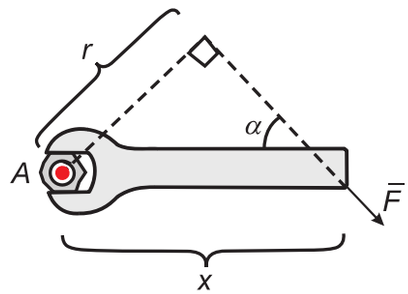
Kappaleen tasapaino pyörimisen suhteen
Kappale on tasapainossa pyörimisen suhteen eli se pyörii tasaisesti tai ei pyöri, kun kappaleen pyörimisakselin suhteen vaikuttavien momenttien summa eli kokonaismomentti on nolla eli $\sum M = 0$.

Voiman momentti voidaan laskea kahdella tavalla:
1. Jos voiman varsi tiedetään, momentti voidaan laskea suoraan määritelmän perusteella. Voiman varsi voidaan usein laskea geometrian avulla. Momentin merkkisääntö on otettava huomioon.

2. Jos voiman varren pituus on työläs selvittää, voidaan voima jakaa komponentteihin ja laskea jokaisen komponentin aiheuttama momentti. Voiman momentti on komponenttien aiheuttamien momenttien summa. Momentin merkkisääntö on otettava huomioon.

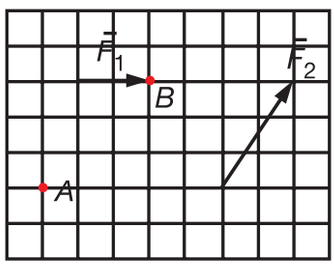


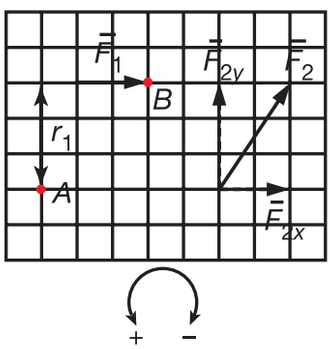
$M_A = Fr$



$M_A = Fr = Fx \sin\alpha$

Esimerkki 1





Voimat vaikuttavat kappaleeseen kuvan mukaisesti. Laske
a) voiman $\overline{F}_1$ momentti akselin A suhteen
b) voimien $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ momenttien summa akselin B suhteen.
Ruudun sivu vastaa pituutta 1,0 m ja voiman suuruutta 1,0 N.

a) Kuvion mukaan voiman $\overline{F}_1$ suuruus on $F_1 = 2{,}0$ N ja varsi $r_1 = 3{,}0$ m. Kun kiertosuunta myötäpäivään on negatiivinen, voiman $\overline{F}_1$ momentti akselin A suhteen on

$$M_A = -F_1 r_1 = -2{,}0\ \text{N} \cdot 3{,}0\ \text{m} = -6{,}0\ \text{Nm}.$$

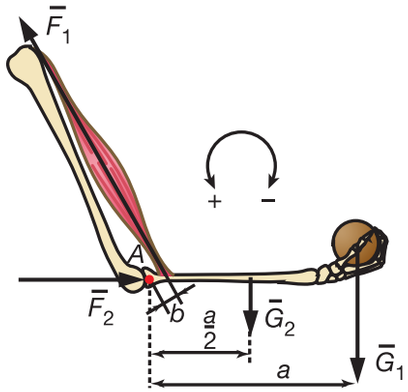
Momentti on 6,0 Nm myötäpäivään.

b) Koska voiman $\overline{F}_1$ vaikutussuora kulkee pisteen B kautta, voima $\overline{F}_1$ ei aiheuta kappaleeseen vääntövaikutusta. Voiman $\overline{F}_1$ momentti on siis nolla. Voiman $\overline{F}_2$ varren laskeminen helpottuu, jos voima $\overline{F}_2$ jaetaan komponentteihin $\overline{F}_{2x}$ ja $\overline{F}_{2y}$ kuvan mukaisesti. Komponenttien $\overline{F}_{2x}$ ja $\overline{F}_{2y}$ varret ovat $r_{2x} = 3{,}0$ m ja $r_{2y} = 2{,}0$ m. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summaksi saadaan

$$\begin{aligned}\sum M_B &= F_1 \cdot 0{,}0\ \text{m} + F_{2x} \cdot r_{2x} + F_{2y} \cdot r_{2y} \\ &= 0{,}0\ \text{Nm} + 2{,}0\ \text{N} \cdot 3{,}0\ \text{m} + 3{,}0\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} \\ &= 12\ \text{Nm}.\end{aligned}$$

Momenttien summa on 12 Nm vastapäivään.

Esimerkki 2



Kyynärvarren painopiste on likimain varren puolivälissä.

Kuvassa esitetään levossa olevaan käsivarteen vaikuttavat voimat. Kyynärvarren massa on noin 1,5 kg ja pituus 0,30 m. Laske hauislihaksessa tarvittavan voiman $\bar{F}_1$ suuruus, kun käsipaino on kuvan osoittamassa paikassa. Käsipainon massa on 5,0 kg. Voiman $\bar{F}_1$ vaikutussuoran ja kiertoakselin A välinen etäisyys on 1,5 cm.

$m_1 = 5{,}0\ \text{kg}, \quad a = 0{,}30\ \text{m}, \quad m_2 = 1{,}5\ \text{kg}, \quad b = 0{,}015\ \text{m},$
$g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Levossa oleva käsivarsi on tasapainossa pyörimisen suhteen. Lasketaan momenttien summa akselin A suhteen. Olkaluun pää kohdistaa kyynärniveleen voiman $\bar{F}_2$, jonka vaikutussuora kulkee akselin A kautta, joten sen momentti on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien tasapainoehdoksi saadaan

$$\sum M_A = -G_1 a - G_2 \cdot \frac{1}{2} a + F_1 b = 0.$$

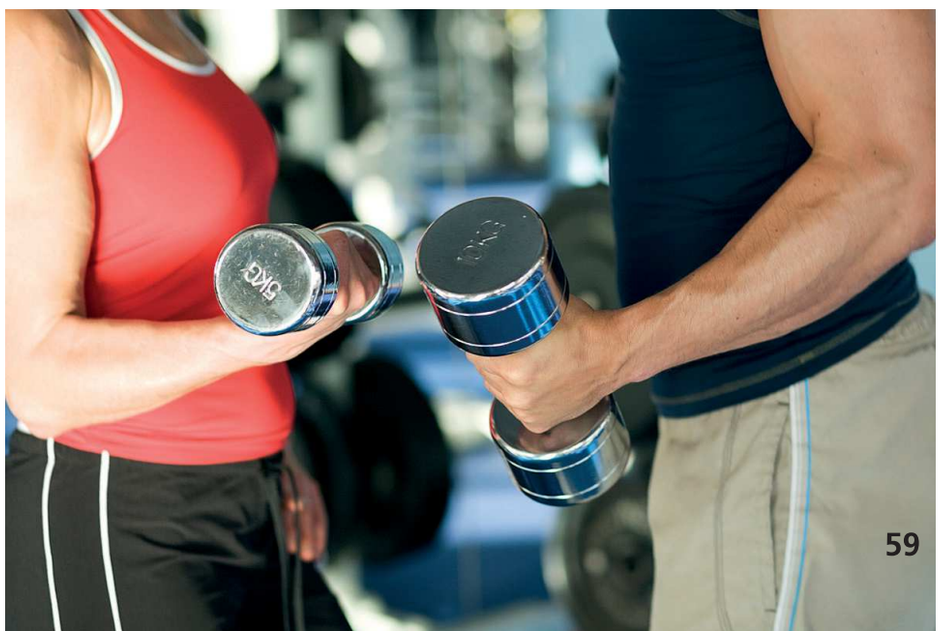
Tasapainoehdosta voiman $\bar{F}_1$ suuruudeksi saadaan

$$F_1 = \frac{G_1 a + G_2 \cdot \frac{1}{2} a}{b} = \frac{m_1 g a + m_2 g \cdot \frac{1}{2} a}{b}$$

$$= \frac{5{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}30\ \text{m} + 1{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}15\ \text{m}}{0{,}015\ \text{m}}$$

$$\approx 1{,}1\ \text{kN}.$$

Tarvittava voiman suuruus on noin 1,1 kN.



Tehtäviä

3-1. Selitä, millaisessa liikkeessä kappale voi olla seuraavissa tapauksissa, kun annetut yhtälöt ovat voimassa. Anna esimerkki jokaisesta tapauksesta.

a) $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja $M = 0$

b) $\sum \overline{F} \neq \overline{0}$ ja $M = 0$

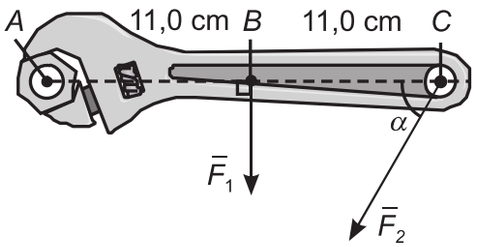
c) $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja $M \neq 0$

d) $\sum \overline{F} \neq \overline{0}$ ja $M \neq 0$

3-2. Jakoavaimeen vaikuttavien voimien suuruudet ovat $F_1 = 4{,}0$ N ja $F_2 = 6{,}0$ N. Voima $\overline{F}_1$ on kohtisuorassa AB:tä vastaan.

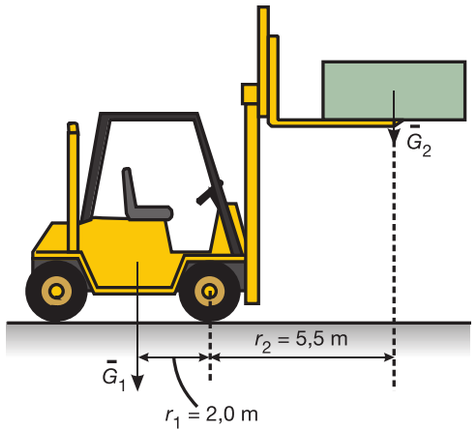
a) Laske voiman $\overline{F}_1$ momentti akselin A suhteen.

b) Kuinka suuri on voimien $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ momenttien summa akselin A suhteen, jos kulma α on 90°? Entä jos $\alpha = 50°$?



3-3. Erään auton pyörien muttereita kiinnitettäessä voiman momentin tulee olla vähintään 130 Nm. Laske pienin voima, joka mutterien kiristämiseen tarvitaan, kun voiman vääntövarren pituus on 24 cm.

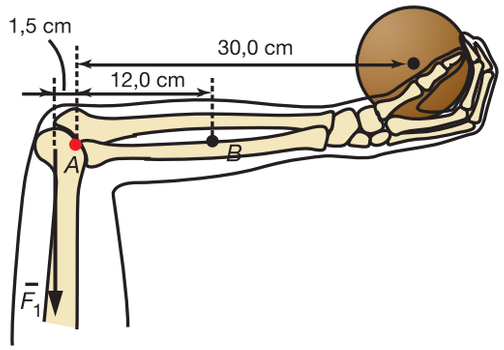
3-4. Kuinka suuri kuorma trukilla voidaan enintään nostaa trukin kaatumatta, kun trukkiin kohdistuvan painon suuruus on $G_1 = 36$ kN? Miten nostettavaa kuormaa voitaisiin suurentaa?



3-5. Esineen punnitsemiseen käytetään tasapaksua sauvaa. Sauvan massa on 3,0 kg ja pituus 1,60 m. Sauva on tasapainossa, kun se tuetaan 0,30 m:n etäisyydeltä siitä sauvan päästä, johon esine on ripustettu. Kuinka suuri esineen massa on?

3-6. Liisa ja Pekka käyttävät tasapaksua lankkua keinulautana. He asettuvat istumaan lankun päihin. Lankun pituus on 3,5 m ja massa 24 kg. Liisan massa on 35 kg ja Pekan 47 kg. Mistä kohdasta lankku on tuettava, jotta se asettuisi tasapainoon?

3-7. Kuulaa kannatellaan kämmenellä kuvan mukaisesti. Kädessä olevan kuulan massa on 2,9 kg, ja vaakasuorassa asennossa olevan käsivarren massa on 2,2 kg. Käsivarteen kohdistuva paino voidaan sijoittaa kuvassa pisteeseen B. Kuinka suuri on tukivoima $\overline{F}_1$, jonka lihas kohdistaa luun päähän, kun käsivarsi on tasapainossa? Käsivarsi pääsee kiertymään akselin A ympäri.



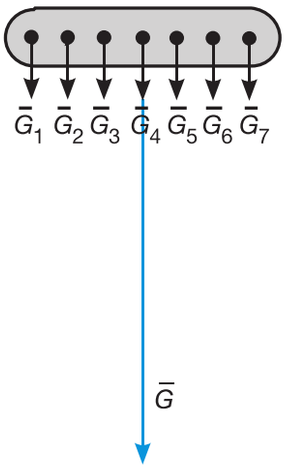
3.2 Kappaleen painopiste

Painopiste

Oppilastyö ▪ Painopisteen määritys

1. Aseta kirja tasapainoon tukemalla sitä sopivasta kohdasta kynän päällä. Etsi tukipiste kokeilemalla.

2. Ripusta pahvilevy esimerkiksi yhdestä kulmastaan kerrallaan statiivitankoon kiinnitettyyn terävään piikkiin. Aseta piikkiin ohut lanka, jonka päässä roikkuu punnus. Piirrä langan avulla pahvilevyyn suora eli luotisuora. Tue pahvilevy suorien leikkauspisteestä. Mitä havaitset?



Kappaleeseen kohdistuva paino $\overline{G}$ on sen osasiin kohdistuvien painojen summa.

Kaikki kappaleet muodostuvat pienistä osasista, joiden massat ovat $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Kappaleen massa on osasten massojen summa. Maa vetää puoleensa kappaleen jokaista osasta. Nämä osavoimat $\overline{G}_1 = m_1\overline{g}$, $\overline{G}_2 = m_2\overline{g}$, $\overline{G}_3 = m_3\overline{g}, \ldots$ osoittavat kaikki kohti Maan keskipistettä. Osavoimien summa on Maan kappaleeseen kohdistama paino $\overline{G}$.

Oppilastyössä huomattiin, että ripustettuun levyyn piirretyt luotisuorat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tätä pistettä sanotaan painopisteeksi. Painon vaikutussuora kulkee aina painopisteen kautta.

Kappaleen painopiste

Painopiste on kappaleeseen kohdistuvan painon kuviteltu vaikutuspiste.

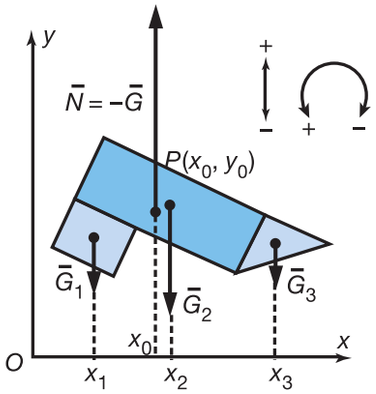
Kappaleen painopiste on piste, jonka kautta kappaleeseen kohdistuvan painon vaikutussuora kulkee aina, olipa kappale missä asennossa tahansa.

Kun kappale tuetaan painopisteestään painon suuruisella voimalla, kappale on tasapainossa missä asennossa tahansa.

Jäykkään kappaleeseen kohdistuvan painon vaikutus voidaan kumota vastakkaissuuntaisella tukivoimalla, jonka vaikutussuora kulkee painopisteen kautta.

Kappaleen eri osasiin kohdistuvat Maan vetovoimat voidaan siis korvata yhdellä painopisteeseen kohdistuvalla, painon suuruisella voimalla.

Painopisteen laskennallinen määrittäminen



Painopisteen määrittäminen laskennallisesti.

Jos kappale voidaan jakaa osiin, joiden painopisteiden paikat tunnetaan, kappaleen painopiste voidaan määrittää laskemalla.

Tarkastellaan koordinaatistossa esimerkkinä tasapaksua, kolmesta homogeenisesta osasta muodostuvaa kappaletta. Osien massat ovat m_1, m_2 ja m_3, ja kappaleen kokonaismassa on m. Osien painopisteiden koordinaatit x- ja y-suunnissa ovat (x_1, y_1), (x_2, y_2) ja (x_3, y_3), ja kappaleen painopisteen koordinaatit ovat (x_0, y_0).

Kappale on tasapainossa, jos sen painopisteeseen kohdistetaan ylöspäin suuntautuva kappaleeseen kohdistuvan painon suuruinen voima. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttiyhtälö origon suhteen on

$$\begin{aligned} M_O &= Gx_0 - (G_1x_1 + G_2x_2 + G_3x_3) \\ &= mgx_0 - (m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3) = 0. \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöstä painopisteen x-koordinaatti:

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Vastaavalla tavalla saadaan painopisteen y-koordinaatti

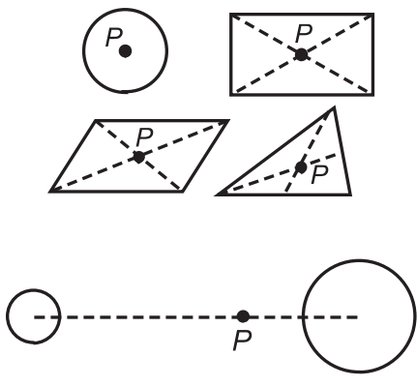
$$y_0 = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Kappaleen painopisteen paikka
Useasta kappaleesta koostuvan levymäisen systeemin painopisteen koordinaatit ovat

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \quad \text{eli} \quad x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$

$$y_0 = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \quad \text{eli} \quad y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

Huomaa: Jos kappale on tasapaksu ja osat ovat tasa-aineisia, symmetrian perusteella painopiste on z-suunnassa kappaleen keskellä.

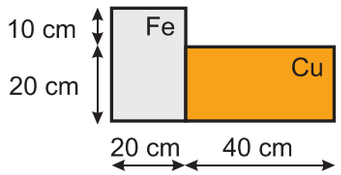


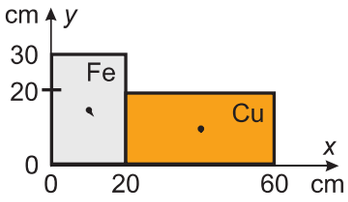
Symmetrisen homogeenisen kappaleen painopiste on symmetriapisteessä, jos kappaleella sellainen on. Kuviin on merkitty muutamien tasapaksusta, homogeenisesta levystä valmistettujen kappaleiden painopisteet. Kahdesta kappaleesta koostuvan systeemin painopiste P on kappaleiden painopisteiden yhdysjanalla.

Jos gravitaatiokenttä (ks. s. 124) ei muutu kappaleen kohdalla, kappaleen painopiste on samassa kohdassa kuin kappaleen **massakeskipiste** (massan keskimääräinen paikka). Tällä kurssilla painopisteellä ja massakeskipisteellä tarkoitetaan samaa pistettä.

Missä sijaitsee nuorallakävelijän, eläimen ja korkkiukon painopiste tukipisteeseen verrattuna?

Esimerkki 3





Tasapaksut rauta- ja kuparilevyt liitetään yhteen kuvan mukaisesti. Rautalevyn massa on 0,85 kg ja kuparilevyn 1,7 kg. Levyn painopisteeseen on porattava reikä. Määritä reiän paikka.

$m_1 = 0{,}85\ \text{kg}, \quad m_2 = 1{,}7\ \text{kg}$

Porattavan reiän paikka löydetään määrittämällä kappaleen painopisteen paikka. Yhdistelmän painopisteen paikka voidaan laskea, kun yksittäisten osien painopisteet ja massat tunnetaan. Sijoitetaan koordinaatisto kuvan osoittamalla tavalla. Kappaleen painopisteen koordinaatit ovat

Kappale	Massa/kg	*x*/cm	*y*/cm
Fe, m_1	0,85	10	15
Cu, m_2	1,7	40	10

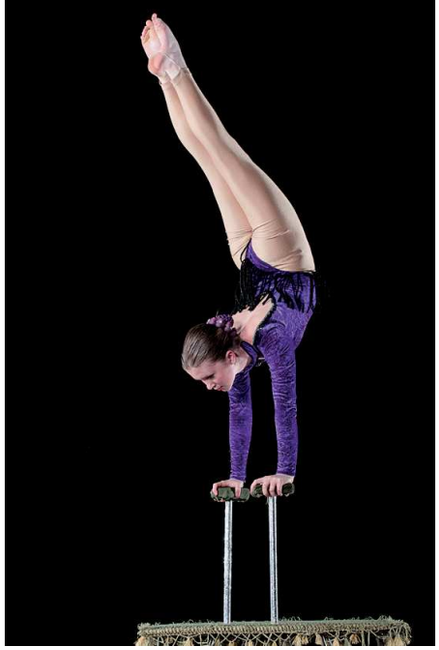
$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}85\ \text{kg} \cdot 10\ \text{cm} + 1{,}7\ \text{kg} \cdot 40\ \text{cm}}{0{,}85\ \text{kg} + 1{,}7\ \text{kg}} = 30\ \text{cm}$$

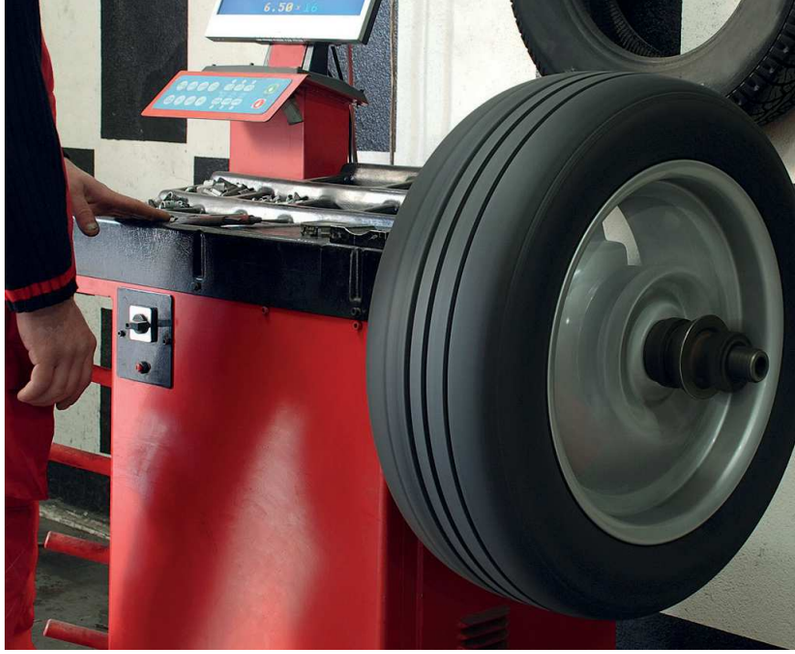
ja

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}85\ \text{kg} \cdot 15\ \text{cm} + 1{,}7\ \text{kg} \cdot 10\ \text{cm}}{0{,}85\ \text{kg} + 1{,}7\ \text{kg}} \approx 12\ \text{cm}.$$

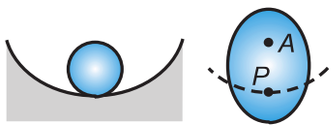
Levyyn porattavan reiän paikka on valitussa koordinaatistossa kohdassa (30 cm, 12 cm).

Jos kappale on homogeeninen ja tasapaksu, sen painopisteen määrittämiseksi ei välttämättä tarvitse tietää sen osien massoja, koska kappaleen massa riippuu sen tiheydestä ja tilavuudesta eli $m = \rho V$. Toisaalta kappaleen tilavuus riippuu sen pinta-alasta ja paksuudesta eli $V = Ah$, joten $m = \rho V = \rho Ah$. Massa on verrannollinen pinta-alaan, joten homogeenisen ja tasapaksun kappaleen painopiste voidaan määrittää, kunhan tiedetään kappaleiden pinta-alat. Kappaleen massa on näin ollen $m = A \cdot m_0$, kun m_0 on massa pinta-alayksikköä kohti.

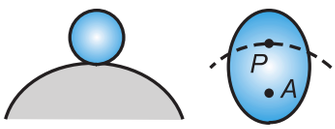




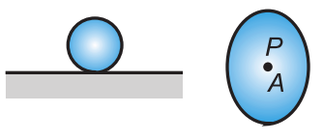
Tasapainolajit



Stabiili tasapaino.



Labiili tasapaino.



Indifferentti tasapaino.

Alustallaan olevan tai ripustetun kappaleen tasapaino riippuu mm. sen painopisteen paikasta. Piirroksissa A on ripustuspiste ja P painopiste.

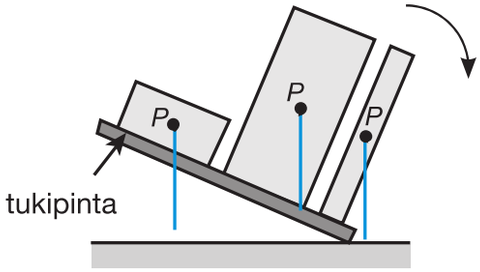
Kappaleen **tasapaino** on **vakaa** eli **stabiili**, jos kappaleen potentiaalienergia on pienin. Jos kappale poikkeutetaan vakaasta tasapainosta, sen potentiaalienergia kasvaa ja se palaa tasapainoasemaansa.

Kappaleen tasapaino on **horjuva** eli **labiili**, jos kappaleen potentiaalienergialla on suurin arvo. Horjuvassa tasapainoasemassa oleva kappale etääntyy tasapainoasemastaan, jos sitä poikkeutetaan vähänkin.

Kappaleen tasapaino on **epämääräinen** eli **indifferentti**, jos kappaleen potentiaalienergia ei muutu, kun kappale poikkeutetaan tasapainosta.

Oppilastyö ▪ Tukipinta

Etsi suorakulmion muotoisen kappaleen painopisteen paikka. Kiinnitä painopisteeseen pieni koukku ja koukkuun luotilanka. Aseta kappale kaltevalle tasolle ja kiinnitä kappaleen eteen teipin pala liukuesteeksi. Kallista tasoa ja tutki, milloin kappale kaatuu. Vaihda kappaleen toinen sivu kaltevaa tasoa vasten ja toista koe.

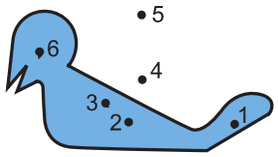


Rakenteiden ja laitteiden suunnittelussa painopiste on aina otettava huomioon. Viereinen piirros havainnollistaa painopisteen sijainnin merkitystä esineen pystyssä pysymiselle. Jos kappaleen painopisteen kautta piirretty luotiviiva leikkaa tukipinnan, kappale on tasapainossa. Oppilastyössä huomattiin, että tasoa kallistettaessa kappale kaatui, kun siihen kohdistuvan painon vaikutussuora siirtyi kappaleen tukipinnan ulkopuolelle.

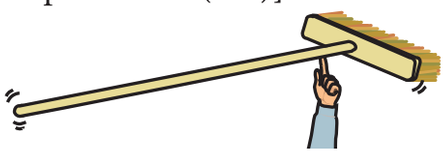
Pohdi ja etsi

3-8. a) Mitä tarkoittaa nelijalkaisen tuolin tukipinta?
b) Miksi kolmijalkaisia tuoleja on käytössä vähän? Miksi nelijalkaista tuolia on kolmijalkaista hankalampi käyttää epätasaisella alustalla?
c) Pieni lapsi pyörii syöttötuolissaan. Missä tapauksissa tuoli voi kaatua?
d) Tarkastele pyöreäkantisen pöydän jalkojen lukumäärän vaikutusta tukipinnan suuruuteen.
e) Pyöreässä pöydässä on keskellä jalka, joka levenee kohti lattiaa. Pohdi, missä tilanteissa pöytä voi kaatua.
f) Miksi raudasta tehty joulukuusen jalka on parempi kuin samanmuotoinen muovista tehty jalka?

3-9. a) Metallilevystä leikattiin hitsaamalla lintu tuuliviiriä varten. Arvioi, missä on linnun painopiste.



b) Harjaa pidetään tasapainossa kuvan mukaisesti. Harja sahataan kahteen osaan sormen kohdalta ja osat punnitaan. Kumpi puoliskoista on painavampi, vai ovatko ne yhtä painavat? [Oulun yliopisto 1996 (osa)]



3-10. a) Miksi painonnostokilpailussa tangon kumpaankin päähän laitetaan yhtä suuret ”painot”?
b) Miksi nostossa käytetään leveää otetta?

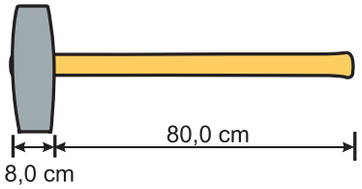
3-11. Kuinka määrittäisit
a) suunnikkaan
b) epäsäännöllisen muotoisen, tasapaksun levyn
c) Suomen maa-alueen kartan painopisteen?

3-12. a) Samanlaisissa juomalaseissa on eri määrät mehua. Vaikuttaako mehun määrä lasin tasapainoon?
b) Mirja lähti aamulla kouluun ja jätti kuvassa olevan kukkamaljakon pöydälleen. Iltapäivällä, kun Mirja tuli kotiin, maljakko oli kaatunut. Kotona ei ollut ketään päivän aikana. Selitä maljakon kaatuminen.

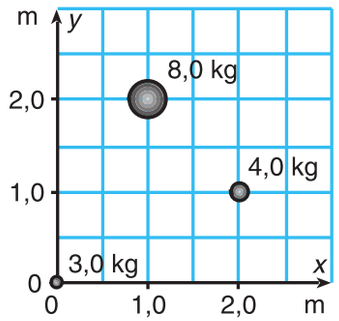
3-13. a) Miksi purjehtija purjehtiessaan usein roikkuu veneen ulkopuolella?
b) Tarkastele esineitä tai tilanteita, joihin liittyy
1) vakaa tasapaino 2) horjuva tasapaino
3) epämääräinen tasapaino.

Tehtäviä

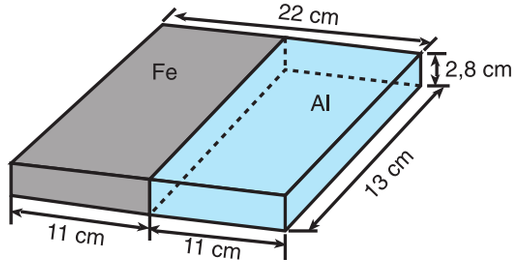
3-14. Laske lekan painopisteen paikka, kun lekan kokonaismassa on 7,5 kg ja tasapaksun varren 0,50 kg. Puuvarsi on lekan pään sisällä.



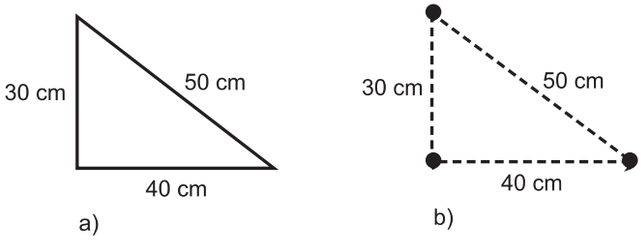
3-15. Missä sijaitsee kuvassa olevan kolmen kuulan muodostaman systeemin painopiste?



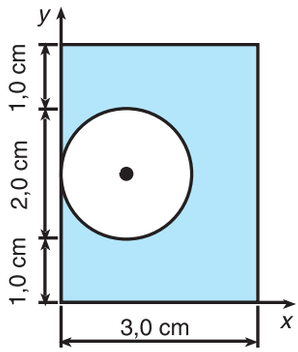
3-16. Raudasta ja alumiinista valmistettiin kuvan mukainen suorakulmaisen särmiön muotoinen kappale, jonka ulkomitat ovat 22 cm, 13 cm ja 2,8 cm. Puolet kappaleen tilavuudesta on rautaa ja puolet alumiinia. Laske kappaleen painopisteen paikka, kun raudan tiheys on 7,87 g/cm^3 ja alumiinin tiheys on 2,70 g/cm^3. Ohje: Osien massat voidaan laskea tiheyden avulla eli $m = \rho V$.



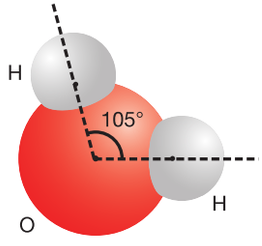
3-17. a) Määritä piirtämällä kuvassa esitetyn tasapaksun levyn painopiste.
b) Määritä laskemalla kolmen pienen kuulan muodostaman systeemin painopiste. Jokaisen kuulan massa on m.



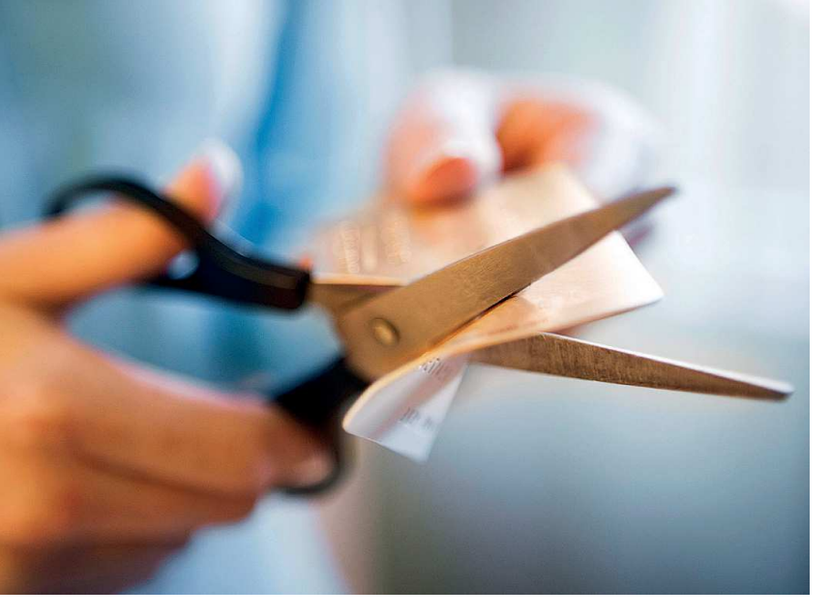
3-18. Kuvan suorakulmion muotoisesta tasapaksusta levystä leikataan ympyrälevy pois. Laske jäljelle jääneen levyn painopiste. Ohje: Merkitse pois leikattu osa painopisteen yhtälöön negatiivisena.



3-19. a) Kaliumbromidikiteessä (KBr) kalium- ja bromidi-ionien keskipisteiden etäisyys on 2,82 Å (ångström). Laske painopisteen paikka (1 Å = 10^{-10} m). Käytä kaliumionin massana 39,10 u:ta ja bromidi-ionin 79,90 u:ta (u on atomimassayksikkö, ks. taulukkokirja).
b) Kuvassa on vesimolekyylin (H_2O) rakenne. Laske vesimolekyylin painopisteen paikka. Happiatomin ytimen etäisyys vetyatomin ytimestä on 0,958 Å. Käytä hapen massana 16,00 u:ta ja vedyn 1,01 u:ta.



3-20. Homogeeninen suorakulmainen särmiö on vaakasuoralla tasolla. Särmiön korkeus on 62 mm, ja sen neliön muotoisen pohjan sivu on 31 mm. Tasoa aletaan kallistaa. Laske rajakulma, jolla kappale kaatuu. Oletetaan, että kappale ei lähde liukumaan.



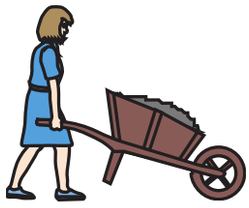
3.3 Mekaaniset koneet

Yksinkertaisilla mekaanisilla koneilla tarkoitetaan laitteita, joilla voidaan muuttaa voiman suuruutta tai suuntaa tai molempia. Puhekielessä niitä ei nimitetä koneiksi. Tällaisia yksinkertaisia koneita ovat esimerkiksi vipu, väkipyörä, talja, sakset, ruuvi, korkinavaaja, vintturi, kalteva taso, puukko ja kirves.

Vipu

Vivun avulla voidaan kohottaa, siirtää tai pitää kuormaa, kuten kiveä, tasapainossa. Esimerkiksi rautakankea käytettäessä kangen tukipiste voi olla kangen kärjessä. Tukipiste voi olla myös kuorman ja käsien kankeen kohdistamien voimien välissä. Vipu on tasapainossa, jos siihen vaikuttavien voimien momenttien summa on nolla. Kottikärryissä kuormaan kohdistuva paino on tukipisteen eli pyörän ja käsien välissä, joten kyseessä on yksivartinen vipu. Rautakankea voidaan käyttää sekä yksi- että kaksivartisena vipuna.

Seiväs kaksivartisena vipuna.



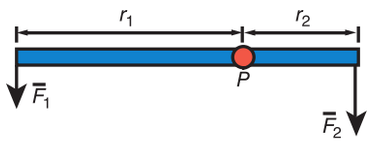
Kottikärryt yksivartisena vipuna.

Vivun tasapainoehto
Vipu on tasapainossa, kun

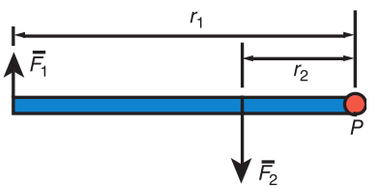
$$F_1 r_1 = F_2 r_2,$$

jossa r_1 on voiman $\overline{F}_1$ varsi ja r_2 voiman $\overline{F}_2$ varsi.

Kaksivartisessa vivussa vipuun kohdistuvat voimat $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ ovat tukipisteen P eri puolilla ja yksivartisessa vivussa ne ovat tukipisteen samalla puolella. Huomaa, että tasapainotilanteessa vipuun vaikuttavien momenttien summa on nolla.

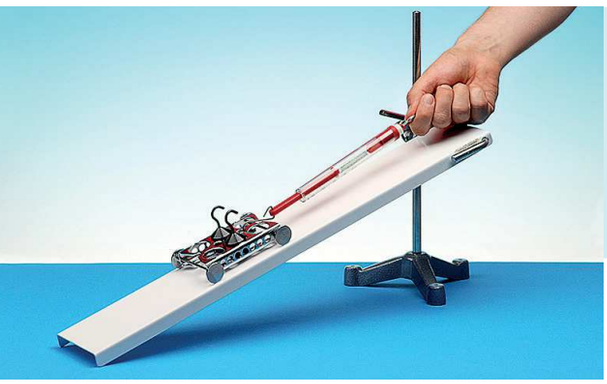


Kaksivartinen vipu.



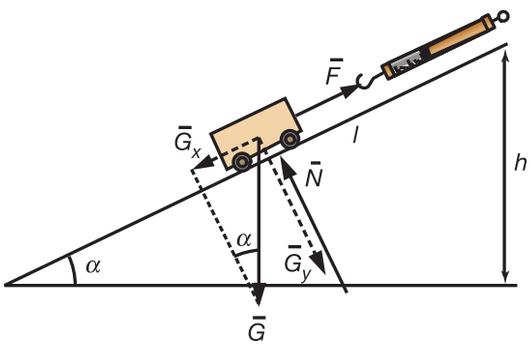
Yksivartinen vipu.

Kalteva taso



Oppilastyö ▪ Kalteva taso
Mittaa jousivaa'alla tason suuntainen voima, joka tarvitaan pitämään herkkäliikkeinen vaunu paikallaan kaltevalla tasolla. Muuta tason kaltevuutta ja vertaa voimia.

Jos vaunua vedetään tai työnnetään vakiovoimalla tason suuntaisesti pitkin kaltevaa tasoa niin, että nopeus on vakio, tarvittavan voiman suuruuteen vaikuttaa tason kaltevuus. Jos taso on jyrkkä, tarvittava voima on suuri. Jos taso on loiva, tarvittava voima on pienempi mutta toisaalta vaunua joudutaan siirtämään pitempi matka. Tämä ilmaistaan usein kaltevaan tasoon liittyvänä **mekaniikan kultaisena sääntönä: mikä voimassa voitetaan, se matkassa menetetään.**



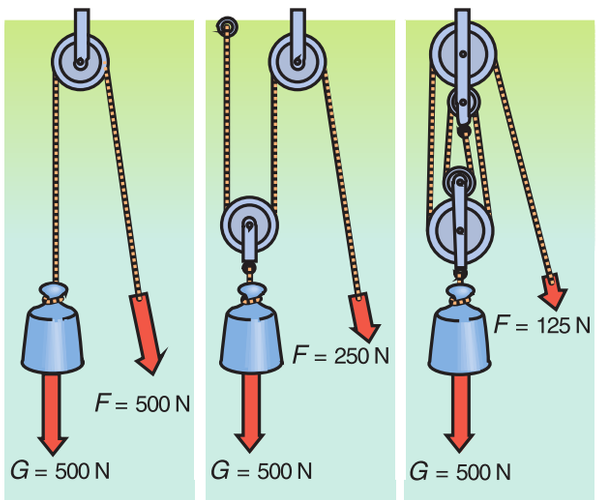
Kaltevan tason suunnassa vaunun liikeyhtälö on $\overline{F} + \overline{G}_x = \overline{0}$. Sovitaan suunta pitkin tasoa yläviistoon positiiviseksi, jolloin $F - G_x = 0$ eli $F = G_x = G \sin\alpha$. Koska $\sin\alpha = \frac{h}{l}$, saadaan yhtälö $F = \frac{Gh}{l}$, josta edelleen $\frac{F}{G} = \frac{h}{l}$.

Kaltevan tason tasapainoehto
Kaltevalla tasolla olevan kappaleen tasapainoehto on

$$\frac{F}{G} = \frac{h}{l},$$

jossa G on kappaleeseen kohdistuva paino, F kappaleeseen kohdistuva tason suuntainen voima, h kaltevan tason korkeus ja l tason pituus.

Väkipyörä ja talja



Kiinteä väkipyörä.

Liikkuva väkipyörä.

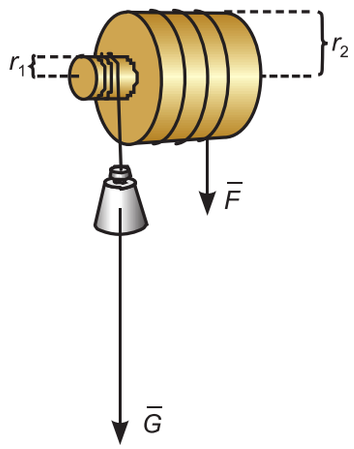
Talja.

Väkipyörissä ja taljoissa köyden jännitysvoima on jokaisessa kohdassa yhtä suuri, kun pyörät oletetaan kevyiksi ja kitkattomiksi. Kun nostettava kappale liikkuu vakionopeudella, nostamiseen tarvittavan voiman suuruus on yhtä suuri kuin nostoköyden kappaleeseen kohdistaman voiman suuruus.

Kiinteää väkipyörää käytetään voiman suunnan muuttajana. Tasaisella nopeudella tapahtuvaan nostamiseen tarvittavan voiman F suuruus on yhtä suuri kuin kuormaan kohdistuva paino G eli $F = G$.

Liikkuvan väkipyörän avulla voidaan vaikuttaa myös tarvittavan voiman suuruuteen. Jos väkipyöriä on kaksi, nostamiseen tarvittava voima on suuruudeltaan $F = G/2$.

Taljassa käytetään useampia liikkuvia ja kiinteitä väkipyöriä. Jos väkipyöriä on neljä, kuorma riippuu neljässä köydessä ja kullakin köydellä on 1/4 kuormasta. Nostamiseen tarvittavan voiman suuruus on $F = G/4$. Jos liikkuviin pyöriin kohdistuvat painot otetaan huomioon, köysiä kuormittava voima on suuruudeltaan $G_{\text{kuorma}} + G_{\text{pyörät}}$.

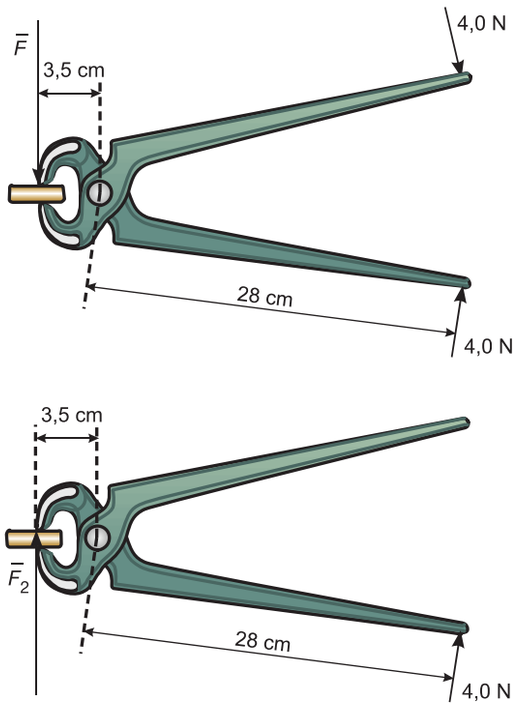


Vintturi

Vintturissa on kaksi samalle akselille kiinnitettyä rumpua. Rummun voi korvata myös kampi. Kun vintturi pyörähtää täyden kierroksen, vetävän voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kuorman potentiaalienergian muutos eli painon $\overline{G}$ suuruisen nostavan voiman tekemä työ. Työperiaatteen avulla saadaan $G \cdot 2\pi r_1 = F \cdot 2\pi r_2$, josta tasapainoehdoksi saadaan $Fr_2 = Gr_1$ eli $\dfrac{F}{G} = \dfrac{r_1}{r_2}$.

Tasapainoehto saadaan myös momenttiehdosta, kun vintturia tarkastellaan vipuna.

Esimerkki 5



Metallilevyä puristetaan hohtimilla kuvan mukaisesti. Vartta puristavan voiman suuruus on 4,0 N. Kuinka suurella voimalla hohtimen leuka puristaa levyä ylhäältäpäin?

$F_1 = 4{,}0\ \text{N}, \quad r_1 = 28\ \text{cm}, \quad r_2 = 3{,}5\ \text{cm}$

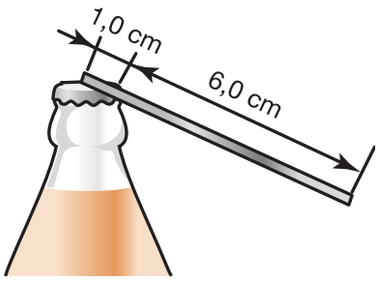
Metallilevy kohdistaa hohtimien leukaan ylöspäin suuntautuvan voiman $\overline{F}_2$, joka on Newtonin III lain mukaan yhtä suuri mutta vastakkaissuuntainen kuin kysytty voima $\overline{F}$, jonka hohtimien leuka kohdistaa metallilevyyn. Hohtimien varret ovat kaksivartisia vipuja. Vivun tasapainoehdosta $F_1 r_1 = F_2 r_2$ saadaan voiman F_2 suuruus:

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{4{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}28\ \text{m}}{0{,}035\ \text{m}} = 32\ \text{N}.$$

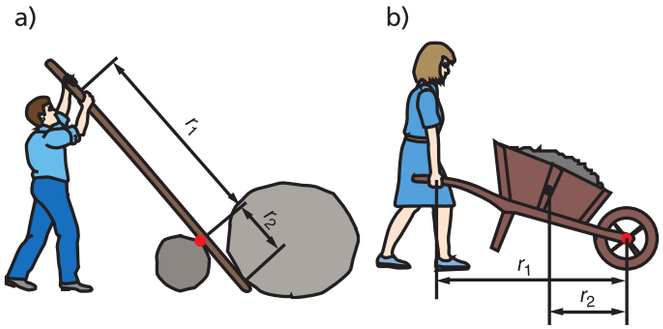
Kysytyn voiman $\overline{F}$ suuruus on 32 N.

Tehtäviä

3-21. Kuinka moninkertainen korkin reunaan kohdistuva voima on vääntävään voimaan verrattuna, kun avainta nostetaan varren päästä?

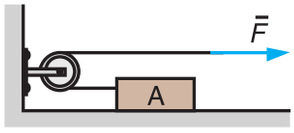


3-22. a) Kuinka suuri voima kohdistuu seipäästä kiveen, kun käsistä seipääseen kohdistuvan voiman suuruus on 280 N ja $r_1 = 1{,}9$ m ja $r_2 = 0{,}16$ m?



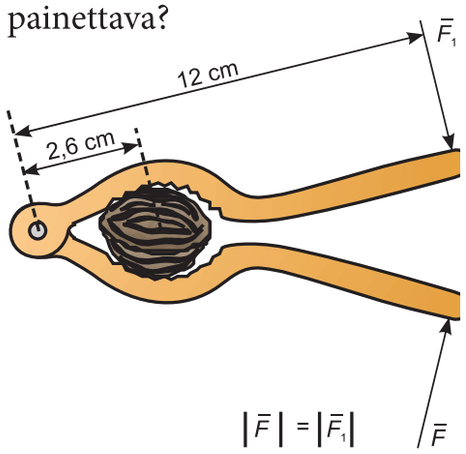
b) Kuinka suuri voima kohdistuu kärryn aisoista kumpaankin käteen, kun kärryyn (ilman pyörää) ja kuormaan kohdistuvan painon suuruus on 430 N? Kuvassa $r_1 = 1{,}2$ m ja $r_2 = 0{,}47$ m.

3-23. Kappaleen A massa on 84 kg, ja kitkakerroin kappaleen ja alustan välillä on 0,20. Kuinka suuri on voima $\bar{F}$, kun
a) kappale liikkuu tasaisesti
b) kappaleen kiihtyvyys on 0,80 m/s^2?

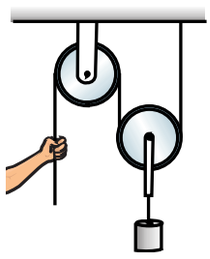


3-24. Sinulla on 170 cm pitkä rautakanki. Haluat nostaa kuormaa ja nelinkertaistaa voimasi vivun avulla.
a) Mihin kohtaan asetat kuorman, kun käytät kankea yksivartisena vipuna?
b) Mihin kohtaan asetat tukipisteen, kun käytät rautakankea kaksivartisena vipuna?

3-25. Pähkinänkuoren särkemiseen tarvitaan vähintään 43 N:n voima pähkinän molemmilta puolilta. Kuinka suurella voimalla särkijän varsia on painettava?



3-26. Kuormaa nostetaan oheisella väkipyörälaitteistolla. Kuorman massa on 25 kg. Kitkaa ja liikkuvan pyörän massaa ei oteta huomioon.
a) Kuinka suurella voimalla köydestä pitää vetää, jotta kuorma nousee?
b) Jos kuormaa halutaan nostaa 0,30 m, kuinka paljon köyttä täytyy vetää alemmas?
c) Kuinka suuri työ nostamisessa tällöin tehdään?
d) Kuinka suuri työ tehtäisiin, jos sama kuorma nostettaisiin suoraan 0,30 m:n korkeudelle ilman väkipyörää?



3.4 Jäykän kappaleen tasapaino

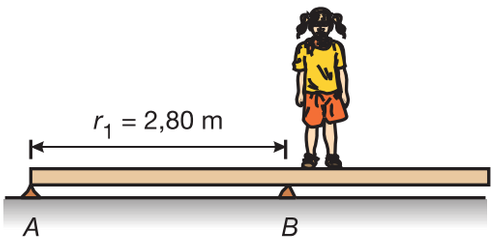
Tarkastellaan tilanteita, joissa kappaleiden muoto ei merkittävästi muutu, vaikka niihin kohdistetaan voimia. Rakennusten seinät, katto, tukirakenteet ja lattiat ovat jäykkiä kappaleita. Ongenvapa, seiväshyppääjän seiväs ja jousi eivät ole jäykkiä kappaleita. Niiden muoto muuttuu niitä käytettäessä.

Jäykän kappaleen tasapaino
Jäykkä kappale on tasapainossa, jos kappaleella ei ole etenemisliikkeen eikä pyörimisliikkeen kiihtyvyyttä. Tasapainoehdot ovat seuraavat:
Kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on nolla eli $\sum \overline{F} = \overline{0}$ (tasapaino etenemisen suhteen).
Kappaleeseen vaikuttavien voimien momenttien summa minkä tahansa akselin suhteen on nolla eli $\sum M = 0$ (tasapaino pyörimisen suhteen).

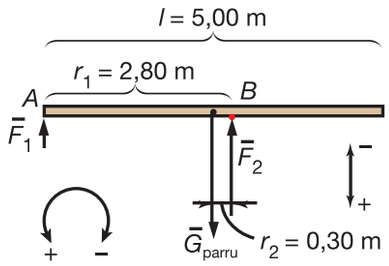
Ensimmäisen ehdon mukaan kappaleella ei ole etenemisliikkeen kiihtyvyyttä. Jos kappale on levossa, se myös pysyy levossa. Momenttiehto on tasapainoehto pyörimisen suhteen, voimien väntövaikutukset kumoavat toisensa, ja kappaleen kulmakiihtyvyys on nolla. Jos kappale on levossa, se ei lähde pyörimään.

Statiikan tehtävän ratkaisun eteneminen:
1. Valitse tarkasteltava kappale. Merkitse (piirtämääsi) kuvaan kaikki tarkasteltavaan kappaleeseen vaikuttavat voimat. Jaa voimat tarvittaessa komponentteihin. Yritä päätellä voimien suunnat oikein – tehtävän ratkaisun kannalta kaikkien voimien suunnan tietäminen ei kuitenkaan ole välttämätöntä.
2. Kirjoita tasapainoehdot. Momenttiehtoa käytettäessä on edullista valita kiertoakseli siten, että sen kautta kulkee mahdollisimman monen voiman vaikutussuora. Tällöin momenttiehto saa mahdollisimman yksinkertaisen muodon. Periaatteessa kiertoakseli voidaan asettaa kappaleen mihin tahansa pisteeseen.
3. Ratkaise tasapainoehdoista saadut yhtälöt. Jos jokin voimista tulee negatiiviseksi, kyseisen voiman suunta on oletettuun suuntaan nähden vastakkainen.

Esimerkki 7



Parru, jonka pituus on 5,00 m ja massa 80,0 kg, on kahden tuen varassa. Parrun painopiste on parrun keskipisteessä.
a) Laske tukipisteissä A ja B parruun vaikuttavat tukivoimat (kun Sanna ei vielä ole parrun päällä).
b) Kuinka pitkälle tukipisteen B oikealle puolelle Sanna, jonka massa on 48,0 kg, voi kävellä niin, että parru pysyy vielä tasapainossa?



$l = 5{,}00$ m, $m_{\text{parru}} = 80{,}0$ kg, $m_{\text{Sanna}} = 48{,}0$ kg, $r_1 = 2{,}80$ m

a) Sanna ei ole vielä parrun päällä. Asetetaan momenttiakseli (kiertoakseli) pisteeseen B. Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Kun suunta vastapäivään on positiivinen, momenttiyhtälö akselin B suhteen on

$$\sum M_B = -F_1 r_1 + G_{\text{parru}} r_2 = 0.$$

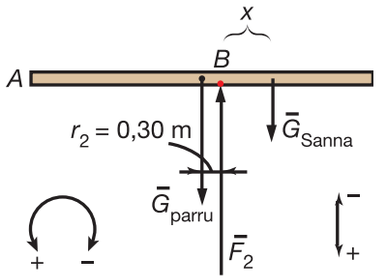
Momenttiyhtälöstä saadaan pisteessä A olevan tuen parruun kohdistaman voiman suuruudeksi

$$F_1 = \frac{G_{\text{parru}} r_2}{r_1} = \frac{m_{\text{parru}} g r_2}{r_1}$$
$$= \frac{80{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}30 \text{ m}}{2{,}80 \text{ m}} = 84{,}09 \text{ N} \approx 84 \text{ N}.$$

Tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = \bar{0}$ eli $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{G}_{\text{parru}} = \bar{0}$. Kun suunta alas valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $-F_1 - F_2 + G_{\text{parru}} = 0$. Tukipisteessä B parruun kohdistuvan voiman suuruus on

$$F_2 = G_{\text{parru}} - F_1$$
$$= 80{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 - 84{,}09 \text{ N} \approx 701 \text{ N}.$$

Voimien suuruudet ovat 84 N ja 701 N.



b) Kun parru pysyy juuri ja juuri tasapainossa, pisteessä A vaikuttava tukivoima on nolla. Asetetaan momenttiakseli pisteeseen B. Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttiyhtälö akselin B suhteen on

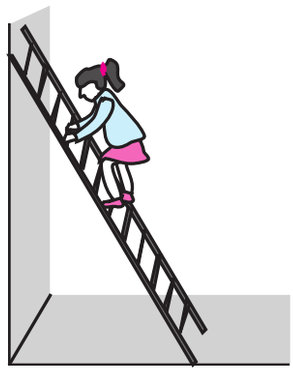
$$\sum M_B = -G_{\text{Sanna}} \cdot x + G_{\text{parru}} \cdot r_2 = 0,$$

jossa x on etäisyys pisteestä B oikealle. Etäisyydeksi x saadaan

$$x = \frac{G_{\text{parru}} \cdot r_2}{G_{\text{Sanna}}} = \frac{m_{\text{parru}} g \cdot r_2}{m_{\text{Sanna}} g} = \frac{m_{\text{parru}} \cdot r_2}{m_{\text{Sanna}}}$$
$$= \frac{80{,}0 \text{ kg} \cdot 0{,}30 \text{ m}}{48{,}0 \text{ kg}} = 0{,}50 \text{ m}.$$

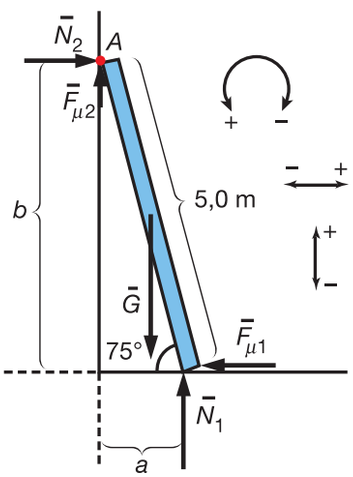
Sanna voi kävellä 0,50 metriä tuen B oikealle puolelle.

Esimerkki 8



Tasapaksut tikapuut nojaavat seinää vasten kuvan mukaisesti. Tikapuilla oleva tyttö on asettunut seisomaan niiden painopisteen kohdalle. Tikapuiden yläpäähän vaikuttava kitkavoima oletetaan niin pieneksi, että sitä ei tarvitse ottaa huomioon. Tikapuiden pituus on 5,0 m ja massa 9,5 kg. Tikapuut muodostavat lattian kanssa 75°:n kulman. Tikapuilla olevan tytön massa on 75 kg. Laske tikapuiden alapäässä tikkaita paikallaan pitävä kokonaisvoima.

$l = 5{,}0$ m, $\quad m = 75$ kg $+ 9{,}5$ kg $= 84{,}5$ kg, $\quad \alpha = 75°$,
$g = 9{,}81$ m/s^2, $\quad F_{\mu 2} \approx 0$ N



Tikapuiden alapäässä vaikuttavat lattian tukivoima $\bar{N}_1$ ja kitkavoima $\bar{F}_{\mu 1}$, joiden vektorisumma kysytty voima on. Yläpäässä tikkaisiin kohdistuu seinän tukivoima $\bar{N}_2$ ja kitka $F_{\mu 2} \approx 0$ N. Tikapuiden painopisteessä vaikuttaa Maan tikkaisiin kohdistama paino $\bar{G}_{\text{tikkaat}}$ ja tytön aiheuttama kosketusvoima, joka on tyttöön kohdistuvan painon $\bar{G}_{\text{tyttö}}$ suuruinen. Voima $\bar{G}$ kuvaa näiden kahden voiman yhteisvaikutusta.

Seinän tikkaisiin kohdistamaa kitkaa ei oteta huomioon, joten tasapainoehto y-suunnassa (pystysuunnassa) on Newtonin II lain perusteella $\sum \bar{F}_y = \bar{0}$ eli $\bar{N}_1 + \bar{G} = \bar{0}$. Kun valitaan suunta

ylös positiiviseksi, skalaariyhtälöstä $N_1 - G = 0$ tukivoiman $\bar{N}_1$ suuruudeksi saadaan

$$N_1 = G = mg = 84{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 828{,}9\ \text{N}.$$

Tikapuiden alapään etäisyys seinästä on $a = 5{,}0\ \text{m} \cdot \cos 75° \approx 1{,}294\ \text{m}$ ja yläpään etäisyys lattiasta on $b = 5{,}0\ \text{m} \cdot \sin 75° \approx 4{,}830\ \text{m}$. Asetetaan momenttiakseli pisteeseen A. Tällöin tukivoiman $\bar{N}_2$ momentti on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, tasapainotilanteessa momenttien summa akselin A suhteen on

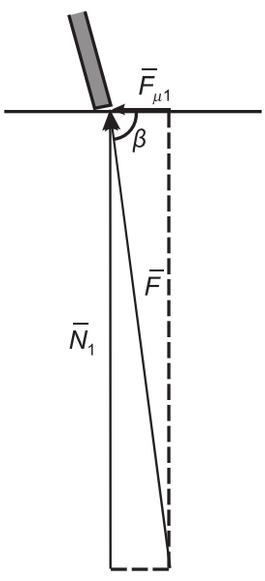
$$\sum M_A = 0 \quad \text{eli} \quad N_1 a - F_{\mu 1} b - G \cdot \frac{1}{2} a = 0\,.$$

Ratkaistaan yhtälöstä kitkan $F_{\mu 1}$ suuruus:

$$F_{\mu 1} = \frac{N_1 a - G \cdot \frac{1}{2} a}{b}$$

$$= \frac{828{,}9\ \text{N} \cdot 1{,}294\ \text{m} - 84{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}294\ \text{m}}{4{,}830\ \text{m}}$$

$$\approx 111{,}0\ \text{N}.$$



Tikapuita alapäässä paikallaan pitävän voiman $\bar{F}$ suuruus saadaan Pythagoraan lauseesta tukivoiman $\bar{N}_1$ ja kitkan $\bar{F}_{\mu 1}$ avulla:

$$F = \sqrt{F_{\mu 1}^2 + N_1^2} = \sqrt{(111{,}0\ \text{N})^2 + (828{,}9\ \text{N})^2} \approx 840\ \text{N}.$$

Voima $\bar{F}$ muodostaa lattian kanssa kulman β:

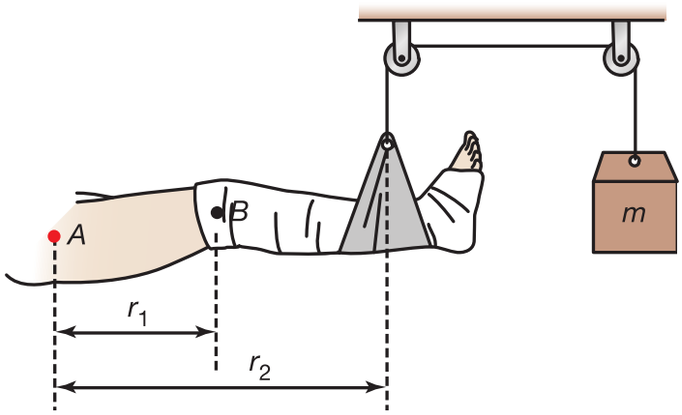
$$\tan \beta = \frac{N_1}{F_{\mu 1}} = \frac{828{,}9\ \text{N}}{111{,}0\ \text{N}}\,, \text{ josta kulma } \beta \approx 82°.$$

Tikapuiden alapäähän kohdistuvan kokonaisvoiman suuruus on 840 N, ja voima muodostaa 82°:n kulman lattian kanssa. Huomaa, että voiman suunta ei ole sama kuin tikkaiden kaltevuus.

Tehtäviä

3-27. Kaksi miestä kantaa olkapäillään vaakaasennossa 6,0 m:n mittaista tasapaksua hirttä, jonka massa on 140 kg. Miesten välimatka on 3,0 m, ja toinen mies on 2,0 m:n etäisyydellä hirren päästä. Kuinka suurella voimalla kumpikin mies kannattaa hirttä?

3-28. Kuvassa olevan jalan massa kipseineen on 15 kg. Jalka pääsee kiertymään lonkkanivelen A ympäri. Piste B on kipsatun jalan painopiste ja $r_1 = 0{,}39$ m ja $r_2 = 0{,}81$ m. Laske punnuksen massa, kun systeemi on tasapainossa.

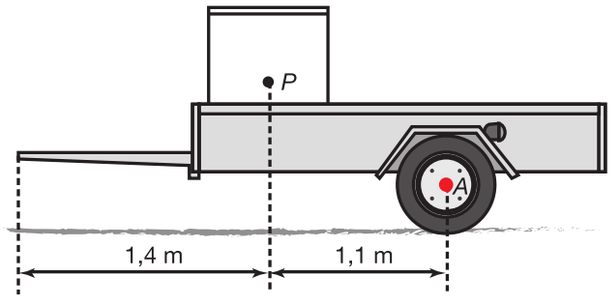


3-29. Kuvan mukainen henkilöauton peräkärry on aluksi tasapainossa pyöriensä suhteen, eli aisaan kohdistuva tukivoima on 0,0 N. Kärryn kokonaismassa on tällöin 570 kg. Lavan etuosaan lisätään kuvan mukaisesti pesukone, jonka massa on 65 kg. Kuvassa P on pesukoneen painopisteen paikka.

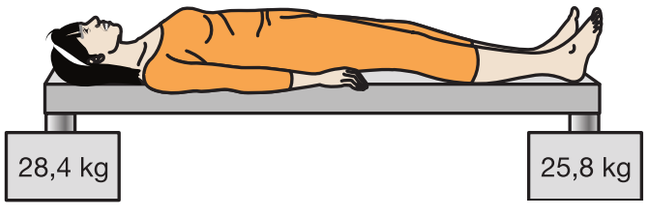
a) Laske voima, joka kohdistuu henkilöauton vetokoukusta peräkärryn aisaan.

b) Laske pyöriin kohdistuva tukivoima.

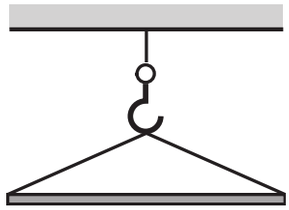
c) Miksi pesukonetta ei tässä tapauksessa saa sijoittaa pyörien akselin A taakse?



3-30. Tasapaksu, homogeeninen levy asetetaan kuvan mukaisesti vaakasuoraan kahden vaa'an varaan ja molemmat vaa'at taarataan. Laske, mikä on levyn päälle makuulle asettuneen, 168 cm:n pituisen henkilön painopisteen etäisyys jalkapohjista.



3-31. Tasapaksua teräspalkkia, jonka massa on 1340 kg ja pituus 5,4 m, nostetaan kuvion mukaisesti sen päihin kiinnitetystä vaijerista, joka kestää katkeamatta korkeintaan 16 kN:n kuorman. Kuinka pitkä vaijerin täytyy vähintään olla?

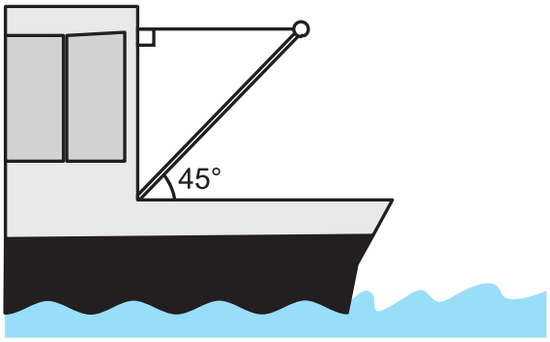


3-32. Pystysuora metallitanko on tuettu päästään läheiseen seinään vaakasuoralla vaijerilla, jonka jännitysvoima voi suurimmillaan olla 210 N. Tämän vaijerin vastakkaiselta puolelta tangon päästä lähtee 45 asteen kulmassa toinen tukivaijeri kohti maata. Kuinka suuri saa vinon vaijerin jännitysvoima enintään olla, jotta tanko pysyisi pystyssä ja vaikuttaisi alustaansa enintään 550 N:n voimalla? Tangon massa on 11 kg.

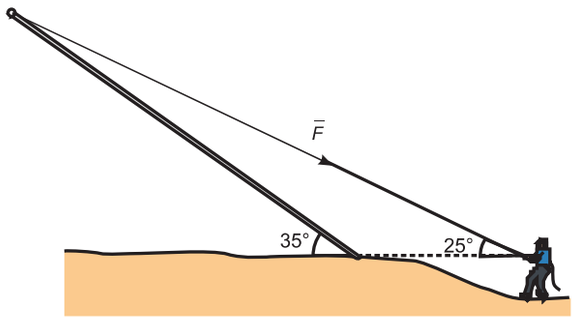
3-33. Laivan lipputanko on kiinnitetty laivan seinään kuvan mukaisesti: yläpäästään se on kiinnitetty vaakasuoralla vaijerilla ja alapäästään saranalla. Lipputangon massa on 78 kg ja pituus 4,5 m. Laske

a) vaijerin jännitysvoima

b) saranan tukivoima tangon alapäässä.

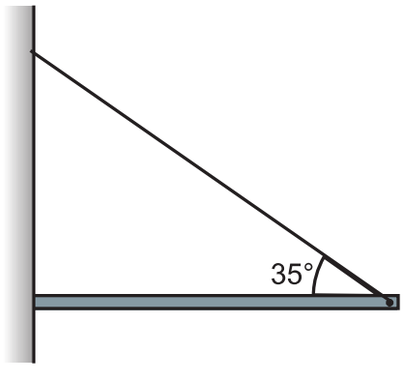


3-34. Kalle pystyttää tasapaksua lipputankoa, jonka massa on 35 kg ja pituus 15 m. Lipputangon painopiste on lipputangon keskipisteessä. Kuinka suuri voima kuvan tilanteessa tarvitaan pitämään lipputankoa paikoillaan vetoköyden välityksellä?

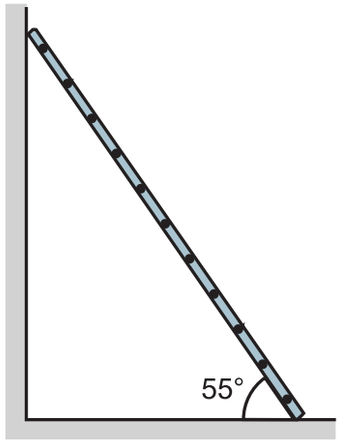


3-35. Pakastekaapin avaaminen on tunnetusti vaikeaa muutaman sekunnin kuluttua siitä, kun ovi on pakasteiden oton jälkeen suljettu.
a) Kaapin sisältämän ilman lämpötila on sulkemishetkellä $-2\ ^\circ\mathrm{C}$. Se laskee nopeasti arvoon $-10\ ^\circ\mathrm{C}$. Kuinka suurella voimalla oven kahvasta pitäisi tällöin vetää, jotta ovi aukeaisi? Oven leveys on 0,5 m ja korkeus 1,0 m, ja kahvan etäisyys oven saranoidusta reunasta on 0,45 m.
b) Miksi oven avaaminen on oleellisesti helpompaa muutaman minuutin kuluttua?
[S1999, 11]

3-36. Oheisen kuvan mukaisessa systeemissä vaakasuorassa olevan homogeenisen tangon massa on 2,2 kg. Laske a) langan jännitysvoima b) tangon seinään kohdistama voima c) tangon ja seinän välinen lepokitkakerroin, kun tanko juuri ja juuri pysyy tasapainossa.



3-37. Tikkaat nojaavat lähes kitkattomasti pystysuoraan seinään siten, että niiden kaltevuuskulma on 55°. Tikkaiden massa on 28 kg ja pituus 4,80 m. Tikkaiden painopiste sijaitsee 2,00 m:n etäisyydellä alapäästä. Kuinka suuri pitää tikkaiden ja lattian välisen kitkakertoimen olla, jotta 65 kg:n painoinen henkilö voi seisoa 1,20 m:n etäisyydellä tikkaiden yläpäästä (3. puola) ilman, että tikkaat alkavat liukua? [K1993, 4]



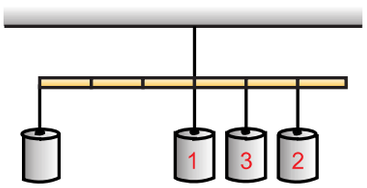
Testaa, osaatko

Oikeita vaihtoehtoja voi olla yksi tai useampia.

1. Voiman momentti riippuu voiman
a) suuruudesta
b) varren pituudesta
c) suunnasta.

2. Miten mutteriin saadaan jakoavaimella suurin vääntövaikutus?
a) Voima kohdistetaan lähelle mutteria.
b) Voima kohdistetaan kauas mutterista.
c) Voiman suunta on kohtisuora jakoavaimen varteen nähden.

3. Kuvassa oleva vipusysteemi on tasapainossa. Mitä tapahtuu, kun yhtä suuret painot 1 ja 2 siirretään riippumaan painosta 3?
a) Vipu kallistuu oikealle.
b) Vipu kallistuu vasemmalle.
c) Vipu pysyy edelleen tasapainossa.



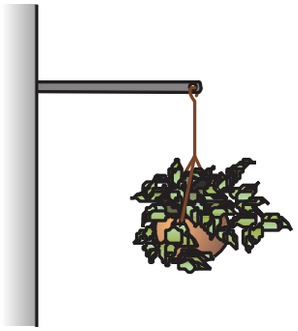
4. Miten kukka-amppelin ripustaminen seinään vaikuttaa pidikkeen kiinnitysruuvin kuormitukseen?
a) Kuormitus on sitä suurempi, mitä lähemmäksi seinää amppeli ripustetaan.
b) Kuormitus on sitä pienempi, mitä lähemmäksi seinää amppeli ripustetaan.
c) Ripustuskohta ei vaikuta kuormitukseen, vaan siihen vaikuttaa ainoastaan amppelin massa.

5. Kun kappaleeseen vaikuttavien momenttien summa on nolla, kappale
a) on tasapainossa pyörimisen suhteen
b) ei pyöri
c) ei pyöri tai pyörii tasaisesti.

6. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?
a) Rautakankea on mahdollista käyttää sekä yksivartisena että kaksivartisena vipuna.
b) Kiinteän väkipyörän avulla voidaan muuttaa tarvittavan voiman suuntaa.
c) Kiinteän väkipyörän avulla voidaan muuttaa tarvittavan voiman suuruutta.

7. Jos neliön muotoisesta nelijalkaisesta sohvapöydästä sahataan yksi jalka pois, pöytä
a) ei pysy enää ollenkaan pystyssä
b) pysyy pystyssä, jos pöydällä ei ole tavaroita
c) kaatuu helposti, jos jalattomalle nurkalle lasketaan esine.

8. Mistä tasapainolajista on kyse, kun voimistelija roikkuu rekistä alaspäin:
a) stabiilista
b) labiilista
c) indifferentistä tasapainosta?



Tiivistelmä

- Voiman $\overline{F}$ momentti akselin suhteen on $M = Fr$, jossa r on voiman vaikutussuoran kohtisuora etäisyys akselista. Etäisyyttä r nimitetään voiman varreksi eli momenttivarreksi.

- Voiman momentti on
  – positiivinen, jos voiman kiertovaikutus on vastapäivään
  – negatiivinen, jos voiman kiertovaikutus on myötäpäivään.

- Painopiste on piste, johon kappaleeseen kohdistuvan painon voidaan ajatella vaikuttavan.

- Useasta osasta koostuvan systeemin painopisteen koordinaatit ovat

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad \text{ja}$$

$$y_0 = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

- Stabiilissa tasapainoasemassa kappaleen potentiaalienergia on pienimmillään. Labiilissa tasapainoasemassa kappaleen potentiaalienergia on suurimmillaan. Indifferentissä tasapainoasemassa kappaleen potentiaalienergia ei muutu.

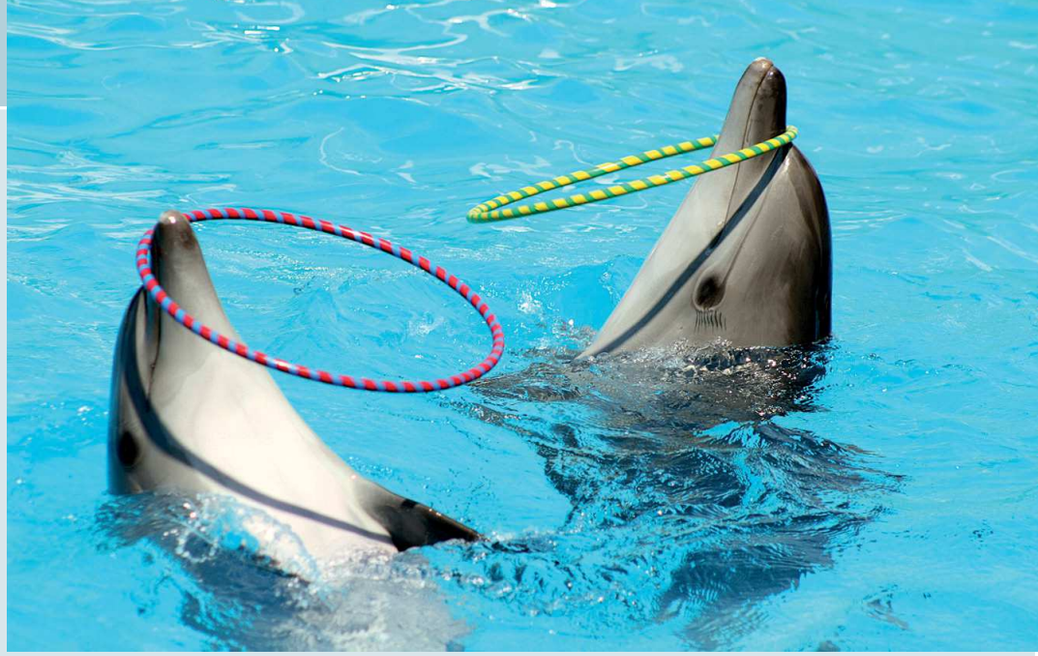
- Kappale pysyy pystyssä, kun kappaleen painopiste on kappaleen tukipinnan yläpuolella.

- Kappaleen tasapainoehdot ovat $\sum \overline{F} = \overline{0}$ (etenemisen suhteen) ja $\sum M = 0$ (pyörimisen suhteen).

4 Pyörimisliikkeen dynamiikka

Tässä luvussa opit
- hitausmomentin
- pyörimisen liikeyhtälön
- pyörimisliikkeen energian
- pyörimismäärän säilymisen
- yhdistetyn etenemis- ja pyörimisliikkeen.

Keskeisiä käsitteitä ovat
- hitausmomentti
- rotaatioenergia
- pyörimismäärä.



Hitaus pyörimisliikkeessä

Etenemisliikkeessä kappaleen liikkeen muutoksen eli liikkeelle lähdön, kiihdytyksen, jarrutuksen tai pysähtymisen aiheuttaa kappaleeseen vaikuttava voima. Pyörimisliikkeen muuttuminen puolestaan vaatii, että kappaleeseen vaikuttaa voiman momentti. Statiikan yhteydessä totesimme, että voiman momentti on voiman vääntövaikutusta kuvaava suure. Ovi aukeaa, kun kohdistamme siihen kädellämme voiman, jolla on momentti. Ovipumpun aiheuttama momentti saa talon ulko-oven sulkeutumaan. Momentti aiheuttaa pyörivän kappaleen kulmanopeuden muutokset eli saa kappaleen pyörimisen nopeutumaan tai hidastumaan.

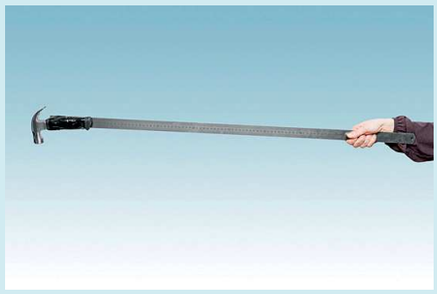
Liikkeen lait -kurssilla tutustuimme massan hitauteen. Massan hitaus ilmenee siten, että sama voima aiheuttaa kevyemmälle kappaleelle suuremman kiihtyvyyden kuin raskaammalle kappaleelle. Kevyt kappale on myös helpompi pysäyttää kuin raskas kappale.

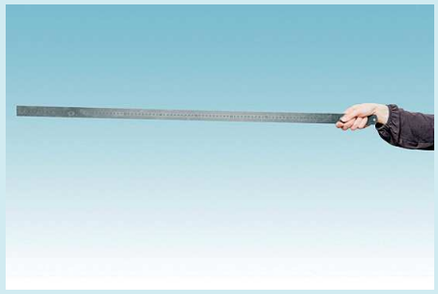
Hitaus ilmenee myös pyörimisliikkeessä. Polkupyöränrengas on helpompi saada pyörimään kuin autonrengas, ja polkupyöränrenkaan pyöriminen on myös helpompi pysäyttää kuin autonrenkaan pyöriminen. Kevyt ovi on helpompi avata kuin raskas ovi, ja tyhjä leikkikentän karuselli on helpompi pysäyttää kuin karuselli, jossa on lapsia.

4.1 Pyörimisliikkeen liikeyhtälö

Oppilastyö ▪ Hitaus pyörimisliikkeessä

Kiinnitä tauluviivaimen toiseen päähän ilmastointiteipillä jokin paino, esimerkiksi vasara. Ota viivaimen vapaasta päästä kiinni ja kääntele viivainta edestakaisin. Ota sen jälkeen kiinni painon puoleisesta päästä viivainta ja toista liike. Ota toinen viivain, johon et ole kiinnittänyt painoa. Heiluttele sitä samalla tavalla edestakaisin. Mitä havaitset? Heiluttele tyhjää viivainta pitäen kiinni keskeltä ja sitten pitäen kiinni toisesta päästä. Huomaatko eroa?



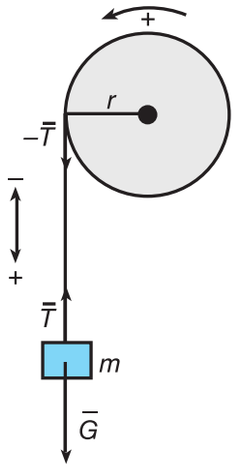


Pyörimisen hitauteen vaikuttaa massan suuruuden lisäksi se, kuinka kaukana massa on pyörimisakselista. Oppilastyössä huomattiin, että kun paino oli kaukana pyörittävästä kädestä, viivaimen pyörittäminen oli vaikeampaa kuin silloin, kun paino oli lähellä kättä. Helpointa pyörittäminen oli silloin, kun viivaimessa ei ollut lainkaan painoa.

Suuretta, joka kuvaa kappaleen ominaisuutta vastustaa pyörimisliikkeen muutoksia, kutsutaan kappaleen **hitausmomentiksi**. Oppilastyön havaintojen perusteella voimme todeta, että hitausmomentti riippuu kappaleen massasta, pyörimisakselista ja massan sijainnista pyörimisakseliin nähden. Kappale, jonka hitausmomentti on suuri, on vaikeampi saada pyörimään kuin kappale, jonka hitausmomentti on pieni. Vastaavasti kappale, jolla on suuri hitausmomentti, on vaikeampi pysäyttää pyörimästä kuin kappale, jolla on pieni hitausmomentti. Tarkastellaan nyt tarkemmin hitausmomentin vaikutusta pyörimisliikkeeseen.

Oppilastyö ▪ Hitausmomentti

Kiinnitä ympyrän muotoinen rakolevy statiiviin. Kierrä rakolevyn uraan lankaa, jonka päähän on kiinnitetty pieni punnus. Kun vapautat punnuksen, huomaat rakolevyn joutuvan kiihtyvään pyörimisliikkeeseen. Tutki levyn pyörimistä tietokoneen avulla. Muuta momenttia erimassaisia punnuksia käyttämällä. Määritä kulmakiihtyvyys α ja voiman momentti M jokaisessa mittauksessa. Toista koe käyttäen painavampaa rakolevyä. Esitä tulokset (α, M)-koordinaatistossa.



$|\overline{T}| = |-\overline{T}| = T$

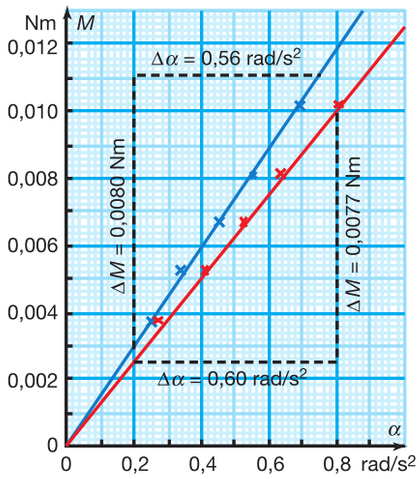
Punnuksen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, jossa m on punnuksen massa. Punnukseen vaikuttaa kaksi voimaa: alas suuntautuva paino $\overline{G}$ ja ylös suuntautuva langan jännitys $\overline{T}$. Langan jännitysvoiman vääntövaikutusta rakolevyyn kuvaa momentti $M = Tr$, jossa r on voiman vaikutussuoran kohtisuora etäisyys pyörimisakselista.

Kun suunta alas on positiivinen, skalaariyhtälöstä $G - T = ma$ saadaan langan jännitysvoimaksi $T = G - ma$. Koska oppilastyössä käytetään pieniä punnuksia, termi ma on pieni painoon G verrattuna. Tällöin voidaan arvioida, että $T \approx G$ eli $T \approx mg$.

Mittauksissa saatiin kevyempään ympyrälevyyn ($r = 0{,}015$ m) liittyen seuraavat tulokset ja lasketut arvot:

Punnuksen massa *m*/kg	Kulmakiihtyvyys α/(rad/s^2)	Langan jännitysvoima *T*/N	Momentti *M*/(Nm)
0,025	0,276	0,245 25	0,003 679
0,035	0,402	0,343 35	0,005 150
0,045	0,521	0,441 45	0,006 622
0,055	0,637	0,539 55	0,008 093
0,070	0,813	0,686 70	0,010 301

Sama mittaus toistettiin painavammalle levylle. Oppilastyössä havaittiin, että kevyempi levy alkoi pyöriä helpommin kuin painavampi. Kun mittaustulokset siirretään (α, M)-koordinaatistoon, sekä kevyempään että painavampaan levyyn liittyvät mittauspisteet asettuvat suoralle, joten $M \sim \alpha$. Painavampaa levyä kuvaava suora on jyrkempi. Suoran fysikaalinen kulmakerroin $\frac{\Delta M}{\Delta \alpha}$ on pyörivän levyn **hitausmomentti *J***.



Kevyemmän levyn hitausmomentiksi saadaan kuvaajasta

$$J = \frac{\Delta M}{\Delta \alpha} = \frac{0{,}0102\ \text{Nm} - 0{,}0025\ \text{Nm}}{0{,}80\ \text{rad/s}^2 - 0{,}20\ \text{rad/s}^2}$$

$$= \frac{0{,}0077\ \text{Nm}}{0{,}60\ \text{rad/s}^2} \approx 0{,}013\ \text{Nms}^2$$

ja raskaamman levyn hitausmomentiksi

$$J = \frac{\Delta M}{\Delta \alpha} = \frac{0{,}0110\ \text{Nm} - 0{,}0030\ \text{Nm}}{0{,}76\ \text{rad/s}^2 - 0{,}20\ \text{rad/s}^2}$$

$$= \frac{0{,}0080\ \text{Nm}}{0{,}56\ \text{rad/s}^2} \approx 0{,}014\ \text{Nms}^2.$$

Voiman momentin ja kulmakiihtyvyyden välillä on yhtälö $M = J\alpha$, jossa J on kappaleen hitausmomentti. Yhtälön mukaan momentti M antaa kappaleelle kulmakiihtyvyyden $\alpha = \frac{M}{J}$.

Hitausmomentin yksikkö on

$$[J] = \frac{[M]}{[\alpha]} = \frac{1\ \text{Nm}}{1\ \frac{1}{\text{s}^2}} = \frac{1\ \text{kgm/s}^2 \cdot 1\ \text{m}}{1\ \frac{1}{\text{s}^2}} = 1\ \text{kgm}^2 = 1\ \text{Nms}^2.$$

Hitausmomentti
Kappaleen ominaisuutta vastustaa pyörimisliikkeen muutoksia kutsutaan kappaleen hitausmomentiksi.
Hitausmomentti riippuu kappaleen muodosta, massasta, pyörimisakselista ja massan sijainnista pyörimisakseliin nähden. Kappale, jolla on suuri hitausmomentti, on vaikeampi saada pyörimään ja pysäyttää pyörimästä kuin kappale, jonka hitausmomentti on pieni.

Mikäli kappaleeseen vaikuttaa useita momentteja, pyörimisen liikeyhtälö on $\sum M = J\alpha$, jossa $\sum M$ tarkoittaa kaikkien momenttien summaa eli kokonaismomenttia. Kaikkien voimien momenteilla ei välttämättä ole samansuuntaista vääntövaikutusta. Ulko-ovea avatessasi kätesi ja ovipumpun aiheuttamilla momenteilla on vastakkainen vääntövaikutus. Koska kätesi aiheuttama momentti

Hinaajan tankkerin kylkeen kohdistamalla voimalla on momentti, joka saa tankkerin kääntymään.

on suurempi kuin ovipumpun aiheuttama momentti, ovi aukeaa. Momentin vaikutussuunta huomioidaan laskuissa etumerkillä (ks. s. 57).

Pyörimisliikkeen liikeyhtälö
Pyörimisliikkeen liikeyhtälö on

$$\sum M = J\alpha,$$

jossa $\sum M$ on akselin A suhteen vaikuttava kokonaismomentti, J kappaleen hitausmomentti ja α kappaleen kulmakiihtyvyys.

Liikeyhtälö $\sum M = J\alpha$ on Newtonin II lain $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ vastine pyörimisliikkeelle. Newtonin II lain mukaan sama kokonaisvoima $\overline{F}$ aiheuttaa kevyelle kappaleelle suuremman etenemisliikkeen kiihtyvyyden $\overline{a}$ kuin painavalle kappaleelle. Vastaavasti yhtälön $\sum M = J\alpha$ mukaan samansuuruinen kokonaismomentti M aiheuttaa suuremman kulmakiihtyvyyden α kahdesta kappaleesta sille, jonka hitausmomentti J on pienempi.

Esimerkki 1

Kappaleen hitausmomentti on 3,0 kgm^2. Kappale on aluksi levossa ja alkaa sitten pyöriä vastapäivään tasaisesti kiihtyen niin, että 4,0 s:n kuluttua sen kulmanopeus on 12,0 rad/s. Laske kappaleeseen vaikuttava kokonaismomentti.

$J = 3{,}0$ kgm^2, $\quad \Delta t = 4{,}0$ s, $\quad \Delta\omega = 12{,}0$ rad/s

Kappaleen kulmakiihtyvyys on

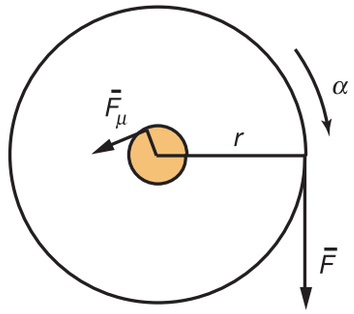
$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{12{,}0 \text{ rad/s}}{4{,}0 \text{ s}} = 3{,}0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Pyörimisliikkeen liikeyhtälöstä $\sum M = J\alpha$ saadaan kappaleeseen vaikuttavaksi kokonaismomentiksi

$$\sum M = J\alpha = 3{,}0 \text{ kgm}^2 \cdot 3{,}0 \text{ rad/s}^2 = 9{,}0 \text{ Nm}.$$

Kappaleeseen vaikuttava kokonaismomentti on 9,0 Nm.

Esimerkki 2



Pyörän ja kiinteän akselin välisen kitkan aiheuttama kitkamomentti vastustaa pyörimistä.

Akseliin kiinnitetyn pyörän säde on 45,7 cm ja hitausmomentti 0,13 Nms^2. Pyörän ympärille on kierretty lankaa, josta riippuu 40,1 g:n massainen punnus. Pyörä on aluksi levossa. Kun punnus päästetään putoamaan, pyörä alkaa pyöriä niin, että ensimmäiseen kierrokseen kuluu aikaa 3,6 s. Laske akselin ja pyörän välisen kitkan aiheuttama momentti. Oletetaan, että naru purkautuu pyörältä liukumatta.

$r = 0{,}457\ \text{m}, \quad J = 0{,}13\ \text{Nms}^2, \quad m = 0{,}0401\ \text{kg}, \quad \Delta t = 3{,}6\ \text{s}$

Kun punnus vapautetaan, se alkaa pudota. Putoamisliike on tasaisesti kiihtyvää liikettä. Pyörältä kiertyvän langan jännitysvoima aiheuttaa vääntömomentin, joka saa pyörän pyörimään tasaisesti kasvavalla kulmanopeudella. Pyöriminen tapahtuu negatiiviseen kiertosuuntaan. Kun pyörä lähtee levosta, pyörän kiertokulman muutos saadaan yhtälöstä $\Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2$. Kun pyörä on pyörinyt yhden kierroksen negatiiviseen kiertosuuntaan, kiertokulman muutos on $\Delta\varphi = -2\pi$ rad. Tällöin pyörän kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{2\Delta\varphi}{(\Delta t)^2} = \frac{2 \cdot (-2\pi\ \text{rad})}{(3{,}6\ \text{s})^2} \approx -0{,}9696\ \text{rad/s}^2.$$

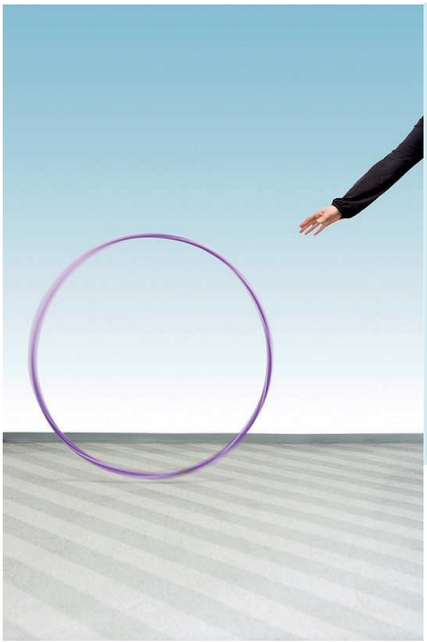
Pyörään vaikuttava kokonaismomentti on $\sum M = M_F + M_\mu$, jossa M_F on langan jännitysvoiman momentti ja M_μ akselin ja pyörän välisen kitkan momentti. Liikeyhtälöstä $\sum M = J\alpha$ eli $M_F + M_\mu = J\alpha$ saadaan kitkamomentille yhtälö $M_\mu = J\alpha - M_F$. Oletetaan, että punnuksen kiihtyvyys on pieni, jolloin langan jännitysvoima on likimain yhtä suuri kuin punnukseen kohdistuva paino mg. Tällöin langan jännitysvoiman momentti on $M_F \approx -mgr$. Sijoitetaan M_F ja kulmakiihtyvyys α kitkamomentin yhtälöön:

$$\begin{aligned} M_\mu &= J\alpha - M_F \approx J\alpha + mgr \\ &= 0{,}13\,\text{Nms}^2 \cdot \left(-0{,}9696\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) + 0{,}0401\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}457\,\text{m} \\ &\approx 0{,}054\ \text{Nm}. \end{aligned}$$

Kitkan momentilla on vastakkaissuuntainen vääntövaikutus kuin langan jännitysvoiman momentilla, ja se hidastaa pyörimistä.

Kitkan momentti on 0,054 Nm.

Pyörimisliikkeen energia



Oppilastyö ▪ Pyörimisliikkeen energia

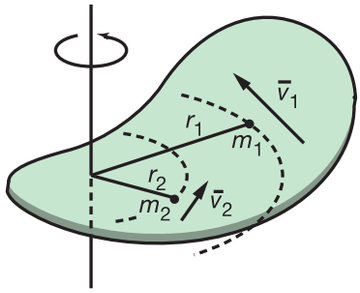
1. Aseta jojon akselin ympärille löysä narusilmukka. Heitä jojo niin, että se jää pyörimään paikallaan narun varassa lähellä lattiaa. Anna pyörivän jojon koskettaa lattiaa. Lopuksi, jojon vielä pyöriessä, nykäise kevyesti narusta ylöspäin niin, että silmukka kiristyy. Tarkkaile, mitä tapahtuu.
2. Heitä hulavanne eteesi lattialle niin, että samalla saatat sen pyörimään voimakkaasti itsesi suuntaan. Tarkkaile, mitä tapahtuu.

Pyörivällä kappaleella on liike-energiaa, sillä kaikki sen rakenneosaset ovat liikkeessä. Pyörimiseen liittyvää liike-energiaa kutsutaan pyörimisliikkeen energiaksi eli rotaatioenergiaksi. Rotaatioenergia on pyörimiseen liittyvää mekaanista energiaa. Jos kappale on pyörimisen lisäksi myös etenemisliikkeessä, sillä on kahdenlaista liike-energiaa: etenemisen ja pyörimisen liike-energiaa.

Oppilastyön kohdassa 1 aluksi paikallaan pyörivä jojo lähtee liikkeelle koskettaessaan lattiaa. Narun nykäiseminen saa jojon palaamaan takaisin ylös käteen. Pyörimiseen oli siis sitoutunut energiaa. Oppilastyön kohdassa 2 lattiaan osuva hulavanne pyörii jonkin aikaa paikallaan, mutta alkaa sitten vieriä heittäjää kohti. Kun hulavanne pyörii paikallaan, osa sen rotaatioenergiasta muuntuu vanteen ja lattian välisen kitkan takia vanteen ja lattian sisäenergiaksi. Kun vanne pyörii paikallaan, kitkan momentti hidastaa sen pyörimistä. Kun pyöriminen on hidastunut riittävästi, vanne lakkaa luistamasta ja alkaa vieriä heittäjää kohti. Vierimisen alkaessa osa rotaatioenergiasta muuntuu etenemisliikkeen liike-energiaksi.

Tarkastellaan kiinteän akselin ympäri kulmanopeudella ω pyörivän jäykän kappaleen liike-energiaa. Käytetään kappaleen kuvaamiseen mallia, jossa kappale koostuu massapisteistä m_1, m_2,… Massapisteiden ratanopeudet ovat v_1, v_2,… Pyörivän kappaleen koko liike-energia eli rotaatioenergia E_r on massapisteiden liike-energioiden summa:

$$E_r = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots$$



Pyörivän kappaleen jokainen piste kiertää pyörimisakselin ympäri ympyrärataa pitkin.

Kaikki massapisteet kiertävät pyörimisakselia samalla kulmanopeudella ω, koska ne ovat kappaleen kiinteän rakenteen vuoksi sidoksissa toisiinsa ja liikkuvat yhdessä. Massapisteiden ratanopeudet ovat silloin $v_1 = r_1\omega$, $v_2 = r_2\omega$,..., jossa r_1, r_2,... ovat massapisteiden etäisyydet pyörimisakselista. Pyörimisliikkeen energia voidaan kirjoittaa muotoon

$$E_r = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots)\omega^2 = \frac{1}{2}(\sum m_ir_i^2)\omega^2.$$

Verrataan tätä etenemisliikkeen liike-energian yhtälöön $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Aikaisemmin totesimme, että nopeuden v vastine pyörimisliikkeessä on kulmanopeus ω ja massan m vastine on hitausmomentti J. Tästä voimme päätellä, että suure $\sum m_ir_i^2$ on kappaleen hitausmomentti J.

Hitausmomentti
Massapisteistä koostuvan systeemin hitausmomentti on

$$J = \sum m_ir_i^2,$$

jossa m_i on massapisteen massa ja r_i massapisteen etäisyys pyörimisakselista.

Pyörimisliikkeen liike-energian yhtälö saadaan muotoon

$$E_r = \frac{1}{2}(\sum m_ir_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Pyörimisliikkeen energia
Kappaleen pyörimisliikkeen energia E_r voidaan esittää hitausmomentin J ja kulmanopeuden ω avulla muodossa

$$E_r = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

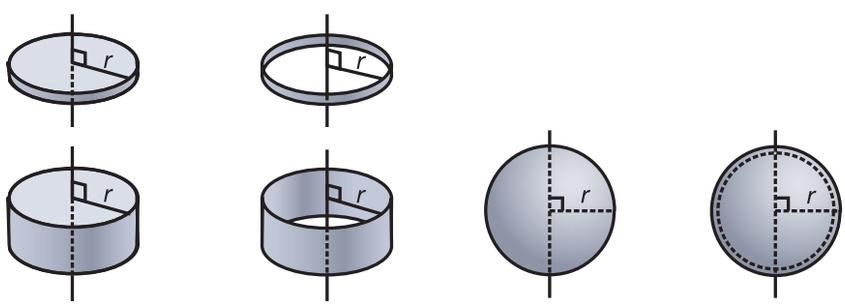
Hitausmomentin riippuvuus kappaleen koosta ja muodosta

Oppilastyö ▪ Hitausmomentin riippuvuus kappaleen muodosta

Ota kaksi samanlaista puukeppiä. Kiinnitä toisen kepin päähän painoksi pieni raskas esine. Pidä kepit yhdensuuntaisina ja tue niiden samanlaiset päät lattian ja seinän rajaan. Päästä kepit kaatumaan samanaikaisesti. Toista tämä useilla eri lähtökulmilla. Kumpi kepeistä osuu ensin lattiaan?

Koska kappaleen voidaan ajatella koostuvan erillisistä massapisteistä, kappaleen hitausmomentti on $J = \sum m_i r_i^2$. Kappaleen hitausmomentin suuruus siis riippuu kappaleen massasta ja siitä, miten massa sijaitsee pyörimisakseliin nähden. Mitä kauempana massa on pyörimisakselista, sitä suurempi on kappaleen hitausmomentti.

Taulukkokirjoissa on annettu monien kappaleiden hitausmomentit. Säännöllisille kappaleille ne voidaan johtaa matemaattisesti.



ympyrälevy ja umpinainen sylinteri
$J = \frac{1}{2}mr^2$

ympyrärengas ja ohutseinäinen sylinteri
$J = mr^2$

umpinainen pallo
$J = \frac{2}{5}mr^2$

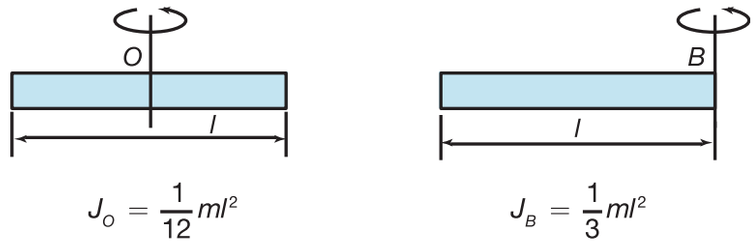
ontto pallo
$J = \frac{2}{3}mr^2$

Huomaa, että ympyrälevyn ja umpinaisen sylinterin hitausmomentit ovat samat. Niissä massa on jakautunut samalla tavalla akselin suhteen. Samoin ympyrärenkaan ja ohutseinäisen sylinterin hitausmomentit ovat keskenään samat. Umpinaisen pallon ja onton pallon hitausmomentit eroavat toisistaan. Ontossa pal-

lossa massa on keskimäärin kauempana pyörimisakselista kuin umpinaisessa pallossa, joten onton pallon hitausmomentti on suurempi kuin umpinaisen pallon hitausmomentti, jos massat ja säteet ovat molemmilla palloilla samat.

Kappaleen hitausmomenttiin vaikuttaa se, minkä akselin suhteen kappale pyörii. Samalla kappaleella on erisuuret hitausmomentit eri pyörimisakselien suhteen, koska massapisteiden etäisyydet eri pyörimisakseleista eroavat toisistaan. Viereisen sivun piirroksissa annetut hitausmomentit liittyvät symmetrisesti kappaleen keskeltä kulkevan pyörimisakselin suhteen tapahtuvaan pyörimiseen.

Tasapaksun sauvan, kuten viivaimen, hitausmomentti sen keskipisteen kautta kulkevan kohtisuoran akselin suhteen on $J_O = \frac{1}{12} ml^2$, jossa m on sauvan massa ja l sauvan pituus. Sauvan päätepisteen kautta kulkevan samansuuntaisen akselin suhteen hitausmomentti on nelinkertainen eli $J_B = \frac{1}{3} ml^2$.



$J_O = \frac{1}{12} ml^2$ $J_B = \frac{1}{3} ml^2$

Aiemmassa oppilastyössä (sivu 83) huomattiin, että viivainta oli helpompi pyörittää keskikohtansa kuin toisen päänsä ympäri. Viivaimen hitausmomentti on keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen pienempi kuin viivaimen pään kautta kulkevan akselin suhteen.

Tämän kappaleen oppilastyössä pyörimisakseli oli sauvan päässä. Huomattiin, että painon kiinnittäminen sauvan toiseen päähän lisäsi pyörimisen hitautta. Pienikokoinen paino voidaan ajatella lähes pistemäiseksi. Se on etäisyydellä l (= sauvan pituus) pyörimisakselista, joten sen hitausmomentti on $J_\mathrm{p} = m_\mathrm{p} l^2$, jossa m_p on painon massa. Kappaleen **kokonaishitausmomentti** on kappaleen **osien hitausmomenttien summa**. Siksi sauvan ja sauvaan kiinnitetyn painon muodostaman kokonaisuuden hitausmomentti on

$$J_\mathrm{kok} = J_\mathrm{s} + J_\mathrm{p} = \frac{1}{3} m_\mathrm{s} l^2 + m_\mathrm{p} l^2,$$

jossa m_s on sauvan massa. Sauvan ja painon yhteinen hitausmomentti on suurempi kuin pelkän sauvan hitausmomentti. Tämän takia pelkkä sauva kaatui nopeammin kuin sauva, johon lisättiin paino.

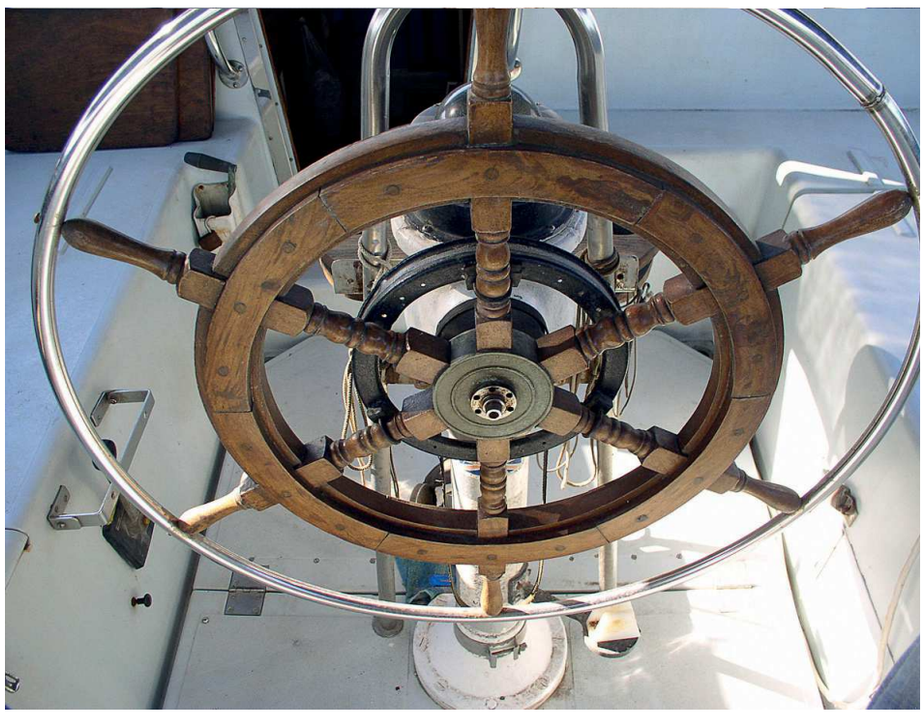
Etenemisliikkeen ja pyörimisliikkeen vastaavuus

Etenemisen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Pyörimisliikkeen liikeyhtälö on $\sum M = J\alpha$.

massa m	hitausmomentti J
voima F	momentti M
kiihtyvyys a	kulmakiihtyvyys α
nopeus v	kulmanopeus ω
paikka x	kiertokulma φ

Kalamiehen aikaansaama vääntömomentti tekee työtä jään aiheuttaman kitkan vaikutuksen voittamiseksi.

Ruorin hitausmomentti voidaan määrittää laskemalla keskipisteen ympäri pyörivän renkaan ja toisesta päästään akseloitujen sauvojen hitausmomenttien summa.



Esimerkki 3

Ympyrälevyn muotoinen vauhtipyörä on akseloitu keskeltä. Sen massa on 150 kg ja säde 0,35 m. Se pyörii nopeudella 72 r/min. Kuinka suuri on vauhtipyörän a) hitausmomentti b) liike-energia?

$m = 150\ \text{kg}, \quad r = 0{,}35\ \text{m}, \quad n = 72\ \text{r/min}$

a) Vauhtipyörän hitausmomentti on

$$J = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \cdot 150\ \text{kg} \cdot (0{,}35\ \text{m})^2$$
$$= 9{,}1875\ \text{kgm}^2 \approx 9{,}2\ \text{kgm}^2.$$

Vauhtipyörän hitausmomentti on 9,2 kgm^2.

b) Vauhtipyörän liike-energia (rotaatioenergia) on $E_\text{r} = \frac{1}{2}J\omega^2$, jossa $\omega = 2\pi n$.

Energiaksi saadaan

$$E_\text{r} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J(2\pi n)^2 = 2J\pi^2 n^2$$
$$= 2 \cdot 9{,}1875\ \text{kgm}^2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{72}{60}\frac{1}{\text{s}}\right)^2 \approx 0{,}26\ \text{kJ}.$$

Vauhtipyörän liike-energia on 0,26 kJ.

Vauhtipyörään voidaan varastoida energiaa.

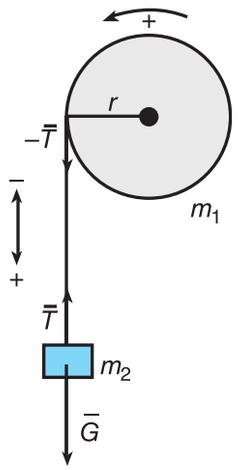
Esimerkki 4

Umpinaisen sylinterin muotoinen ympyrälevy on akseloitu lähes kitkattomasti statiiviin. Levyn massa on 0,150 kg ja säde 6,0 cm. Levyn ympärille on kierretty lankaa ja lankaan on kiinnitetty punnus. Punnuksen massa on 50,0 g. Punnus putoaa, jolloin ympyrälevyn pyörimisnopeus kasvaa. Laske punnuksen kiihtyvyys.

$m_1 = 0{,}150\ \text{kg}, \quad m_2 = 0{,}0500\ \text{kg}, \quad r = 0{,}060\ \text{m}$

Umpinaisen ympyrälevyn hitausmomentti on $J = \frac{1}{2}mr^2$. Paino $\overline{G}$ ja langan jännitysvoima $\overline{T}$ antavat punnukselle kiihtyvyyden $\overline{a}$.

Punnuksen etenemisliikkeen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_2\overline{a}$ eli $\overline{G} + \overline{T} = m_2\overline{a}$. Sovitaan punnuksen liikkeen suunta eli suunta alas positiiviseksi. Tällöin saadaan skalaariyhtälö $m_2 g - T = m_2 a$.



$|\overline{T}| = |-\overline{T}| = T$

Pyörimisliikkeen liikeyhtälö on $\sum M = J\alpha$. Valitaan ympyrälevyn pyörimissuunta positiiviseksi. Voiman $\overline{T}$ momentti aiheuttaa kiihtyvän pyörimisliikkeen, koska vastusvoimien momentteja ei oteta huomioon, joten pyörimisliikkeen liikeyhtälö on $Tr = J\alpha$. Koska $\alpha = \frac{a}{r}$ ja $J = \frac{1}{2}m_1 r^2$, pyörimisliikkeen liikeyhtälö saadaan muotoon $Tr = \frac{1}{2}m_1 r^2 \frac{a}{r}$, josta voimalle T saadaan yhtälö $T = \frac{1}{2}m_1 a$. Kun voima $T = \frac{1}{2}m_1 a$ sijoitetaan punnuksen etenemisen liikeyhtälöön $m_2 g - T = m_2 a$, saadaan $m_2 g - \frac{1}{2}m_1 a = m_2 a$.

Punnuksen kiihtyvyys on

$$a = \frac{m_2 g}{m_2 + \frac{1}{2}m_1} = \frac{0{,}0500\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{0{,}0500\ \text{kg} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}150\ \text{kg}} \approx 3{,}9\ \text{m/s}^2.$$

Punnuksen kiihtyvyys on 3,9 m/s^2.

Huomaa, että tässä esimerkissä (toisin kuin esimerkissä 2 sivulla 87) punnuksen kiihtyvyys laskettiin langan todellisen jännitysvoiman $\overline{T}$ avulla eikä punnuksen painon $\overline{G}$ avulla, koska punnuksen massa ei ole pieni verrattuna pyörivän kappaleen massaan.

Työ pyörimisliikkeessä

Kappaleen saaminen pyörimään ja pyörivän kappaleen pysäyttäminen vaativat työtä. Auton jarrujen aiheuttaman kitkan momentti tekee työtä pysäyttäessään renkaiden pyörimisen. Kun poljemme polkupyörällä, eturattaaseen polkimilla kohdistamamme momentti tekee työtä ja saa takapyörän pyörimään. Etenemisliikkeessä vakiovoiman tekemä työ on $W = F\Delta x$, jossa Δx on kappaleen siirtymä ja voiman oletetaan olevan yhdensuuntainen siirtymän kanssa. Pyörimisliikkeessä voimaa vastaava suure on voiman momentti M ja siirtymää vastaava suure on kiertokulman muutos $\Delta\varphi$. Momentin tekemä työ on silloin $W_\mathrm{r} = M\Delta\varphi$.

Työ pyörimisliikkeessä
Momentti M tekee pyörivään kappaleeseen työn

$$W_\mathrm{r} = M\Delta\varphi,$$

jossa $\Delta\varphi$ on kiertokulman muutos momentin vaikutusaikana.

Työperiaatteen mukaan voiman kappaleeseen tekemä työ W ilmenee etenemisliikkeessä kappaleen etenemisliikkeen liike-energian $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ muutoksena, $W = \Delta E_\mathrm{k}$. Pyörimisliikkeessä vastaavasti momentin tekemä työ W_r ilmenee kappaleen pyörimisenergian muutoksena, $W_\mathrm{r} = \Delta E_\mathrm{r}$.

Esimerkki 5

Sähkömoottori kohdistaa hiomalaikkaan 9,5 Nm:n momentin. Hiomalaikan hitausmomentti on 2,2 kgm^2. Kuinka suuren työn sähkömoottorin aiheuttama momentti tekee hiomalaikkaan 8,0 s:n aikana?

$M = 9{,}5\ \text{Nm}, \quad J = 2{,}2\ \text{kgm}^2, \quad \Delta t = 8{,}0\ \text{s}$

Pyörimisliikkeen liikeyhtälöstä $\sum M = J\alpha$ saadaan kulmakiihtyvyydeksi

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{9{,}5\ \text{Nm}}{2{,}2\ \text{kgm}^2} \approx 4{,}3182\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Hiomalaikan kiertokulma 8,0 s:n aikana on silloin

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}3182\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (8{,}0\ \text{s})^2 = 138{,}1824\ \text{rad}.$$

Sähkömoottorin aiheuttaman momentin tekemä työ on

$$W_\text{r} = M\Delta\varphi = 9{,}5\ \text{Nm} \cdot 138{,}1824\ \text{rad} \approx 1300\ \text{J}.$$

Sähkömoottorin aiheuttama momentti tekee työn $W_\text{r} \approx 1300$ J.

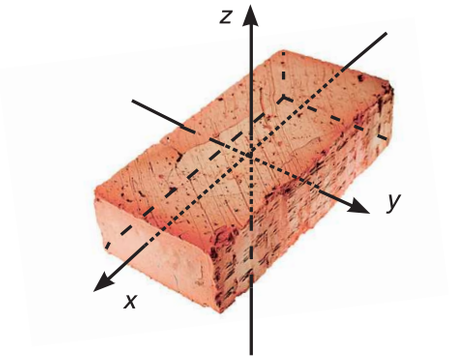
Pohdi ja etsi

4-1. Miksi ihminen nostaa käsivarret sivuilleen esimerkiksi kävellessään kapealla laudalla tai hyppiessään rantakivillä?

4-2. Tarkastellaan kahta samanmassaista ympyrälevyä. Toisen säde on suuri, toisen pieni. Kumman levyn saa helpommin pyörimään? Miksi?

4-3. Pyörremyrskyt voivat joskus saada aikaan suurta tuhoa. Mistä pyörremyrskyn energia on peräisin?

4-4. Minkä painopisteen kautta kulkevan särmän suuntaisen akselin suhteen tiiliskiven hitausmomentti on a) suurin b) pienin?



4-5. Selosta, miten voidaan kokeellisesti määrittää polkupyörän pyörän hitausmomentti. [K2004, 15]

Tehtäviä

4-6. Umpinaisen kiekon keskiössä on ura, johon kierrettiin ohutta lankaa. Uran säde on 1,5 cm. Kun lankaan ripustettu punnus (massa m) päästettiin putoamaan, kiekko alkoi pyöriä ja sen kulmakiihtyvyys (α) mitattiin.

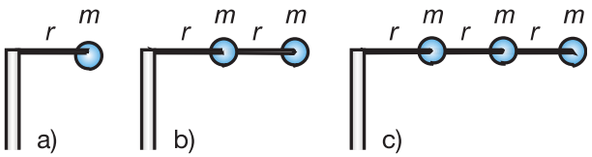
m/g	α/(rad/s^2)
20	0,124
60	0,381
80	0,492
100	0,624
120	0,744

a) Määritä kiekon hitausmomentti graafisesti mittaustulosten avulla.
b) Miten kuvaaja muuttuisi, jos kiekkoon kiinnitettäisiin symmetrisesti kaksi lisäpainoa ja koesarja suoritettaisiin uudelleen?

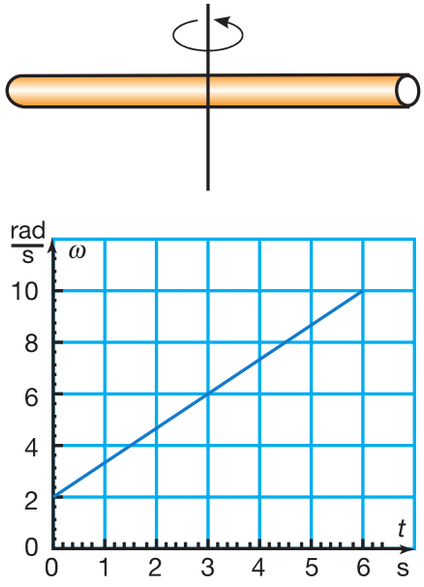
4-7. Sentrifugin pyörivä osa, roottori, on umpinaisen sylinterin muotoinen. Sen massa on 18 kg ja säde 14 cm. Sitä pyörittää sähkömoottori, joka vaikuttaa alussa 30 Nm:n momentilla.
a) Laske roottorin kulmakiihtyvyys.
b) Missä ajassa levosta lähtevä roottori saavuttaa pyörimisnopeuden 24 000 r/min?

4-8. Täytekakkupohja on umpinaisen sylinterin muotoinen. Kakun säde on 15 cm ja massa 1,53 kg. Kun pakastettua kakkupohjaa sulatetaan mikroaaltouunissa, se pyörii yhden kierroksen 12 sekunnissa. Laske kakun a) hitausmomentti b) liike-energia, kun kakku on keskellä mikroaaltouunin pyörivää alustaa.

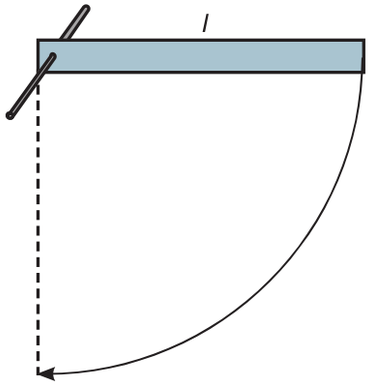
4-9. Sauvan päässä olevaan kevyeen, jäykkään tankoon kiinnitetään kuvan mukaisesti kuulia, joista kunkin massa m on 25 g. Laske kuulasysteemin hitausmomentti, kun r on 0,35 m.



4-10. Ohut sauva pyörii keskipisteensä ympäri, ja sen kulmanopeus muuttuu kuvaajan mukaisesti.
a) Mikä on sauvan kulmakiihtyvyys?
b) Hetkellä $t = 3{,}0$ s sauvalla on pyörimisenergiaa 2,1 J. Mikä on sauvan pyörimisenergian määrä hetkellä $t = 0$ s?

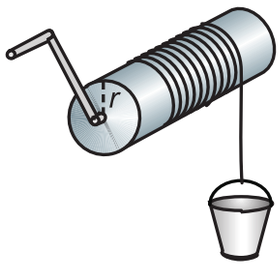


4-11. Vaakasuorassa oleva ohut sauva on laakeroitu toisesta päästään kitkattomasti. Sauvan massa on $m = 0{,}75$ kg ja pituus $l = 1{,}2$ m. Sauva päästetään heilahtamaan. Mikä on sen kulmakiihtyvyys liikkeen alussa?



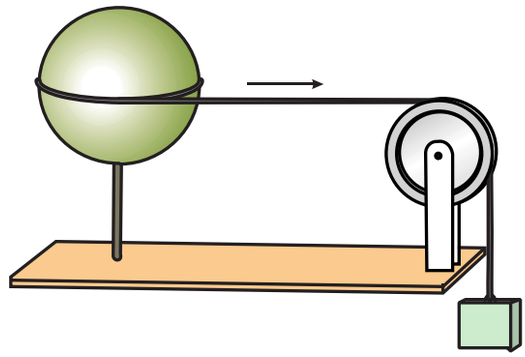
4-12. Kuinka pitkä jatke pitää lisätä 75,0 cm:n pituiseen tasa-aineiseen sauvaan, jotta sen hitausmomentti kaksinkertaistuu? Sekä alkuperäisen että korjatun sauvan pyörimisakseli kulkee kohtisuorasti sauvan keskipisteen kautta.

4-13. Naru on kierretty umpinaisen sylinterimäisen akselin ympärille. Vesisanko, jonka kokonaismassa on 4,0 kg, on kiinnitetty naruun. Sanko pääsee putoamaan. Laske sangon kiihtyvyys. Sylinterin massa on 12 kg ja säde 8,0 cm.



4-14. Sylinterin muotoinen vauhtipyörä, jonka säde on 0,25 m ja massa 88 kg, pyörii kiinteän akselin ympäri kierrostaajuudella 2200 1/min. Pyörää jarrutetaan painamalla jarrukappaletta kehää vastaan kohtisuoralla 90 N:n voimalla. Kappaleen ja vauhtipyörän välinen kitkakerroin on 0,28. Jarrutuksen aikana pyörään vaikuttaa myös vakiona pysyvä laakerikitka. Kuinka suuri on laakerikitkasta aiheutuva jarruttava momentti, kun vauhtipyörän kierrostaajuus pienenee kymmenenteen osaansa 50 sekunnin aikana? [S2002, 14]

4-15. Ohutseinäinen pallo, jonka massa on 4,5 kg ja säde 8,5 cm, pääsee pyörimään kitkattomasti kiinnitystangon ympäri. Väkipyörän halkaisija on 10,0 cm ja hitausmomentti 0,0030 kgm^2. Väkipyörän kiinnityskohdan kitka on pieni. Ohuen siiman päässä oleva rasia (massa 0,60 kg) päästetään levosta putoamaan. Mikä on rasian nopeus, kun se on pudonnut 1,0 m:n matkan? Oletetaan, että siima ei luista eikä veny.



4-16. Vauhtipyörä, jonka säde on 0,25 m ja hitausmomentti 2,1 kgm^2, pyörii kulmanopeudella 105 rad/s.
a) Kuinka suuri on pyörään varastoitunut mekaaninen energia?
b) Kun pyörää jarrutetaan painamalla jarrukappaletta 110 N:n voimalla ulkokehää vasten, pyörä pysähtyy tasaisesti hidastuen ajassa 29 s. Määritä jarrukappaleen ja pyörän välinen kitkakerroin. Laakerikitka voidaan olettaa merkityksettömäksi.

4-17. Jos kappaleen hitausmomentti kappaleen painopisteen kautta kulkevan pyörimisakselin suhteen on J_O, hitausmomentti samansuuntaisen, etäisyydellä r painopisteestä olevan akselin suhteen on $J = J_O + mr^2$, jossa m on kappaleen massa. Tämä on Steinerin sääntö. Laske Steinerin säännön avulla sauvan hitausmomentti sauvan pään kautta kulkevan akselin suhteen. Sauvan hitausmomentti sauvan painopisteen kautta kulkevan akselin suhteen on $J_O = \frac{ml^2}{12}$, jossa l on sauvan pituus.

4-18. Likimain pallon muotoinen omena, jonka massa on 180 g ja halkaisija 7,2 cm, on kiinnittynyt oksaan 2,5 cm pitkällä kannalla. Laske omenan hitausmomentti kiinnityspisteen suhteen.

Pyörimismäärän säilymislaista seuraa, että ilmassa kehon jonkin osan kääntäminen aiheuttaa automaattisesti muun kehon kääntymisen vastakkaiseen suuntaan.

Tanssijat osaavat soveltaa pyörimismäärän säilymislakia. Jos piruetti tai pyörähdys halutaan vauhdikkaaksi, kädet on siirrettävä kaukaa lähelle kehoa (pyörimisakselia).

4.2 Pyörimismäärä ja pyörimismäärän säilyminen

Paikallaan olevaa polkupyörää on vaikea pitää tasapainossa, mutta liikkuva pyörä tuntuu pysyvän pystyssä lähes itsestään. Tämä johtuu tärkeästä luonnonlaista, pyörimismäärän säilymisestä. Nopeasti pyörivien pyöränrenkaiden asento pyrkii pysymään muuttumattomana, ja siksi liikkuva polkupyörä pysyy hyvin pystyssä. Jos pyörät eivät pyöri, polkupyörä kaatuu helposti painon vaikutuksesta. Pyörimismäärän säilymisen takia myös veden kiertoliike pesualtaassa nopeutuu veden lähestyessä poistoaukkoa.

Liikkeen lait -kurssilla etenemisliikkeen käsittelyn yhteydessä todettiin, että kappaleeseen vaikuttavan kokonaisvoiman F ja sen vaikutusajan $\Delta t = t_2 - t_1$ tulo on kappaleen liikemäärän $p = mv$ muutos eli

$$F\Delta t = \Delta p = \Delta(mv) = mv_2 - mv_1,$$

jossa v_1 on kappaleen nopeus hetkellä t_1 ja v_2 nopeus hetkellä t_2. Pyörimisliikkeen liikeyhtälö on $\sum M = J\alpha = J\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{J\omega_2 - J\omega_1}{\Delta t}$, kun pyöriminen on tasaisesti kiihtyvää, eli

$$\sum M\Delta t = J\omega_2 - J\omega_1,$$

jossa $\sum M$ on kappaleeseen vaikuttava kokonaismomentti ja ω_1 on kappaleen kulmanopeus hetkellä t_1 sekä ω_2 kulmanopeus hetkellä t_2.

Verrataan yhtälöitä $\sum M\Delta t = J\omega_2 - J\omega_1$ ja $F\Delta t = mv_2 - mv_1$ toisiinsa. Koska voiman F vastine pyörimisliikkeessä on momentti M, päättelemme, että liikemäärän mv vastine pyörimisliikkeessä on suure $J\omega$ eli pyörimismäärä.

Pyörimismäärä
Kappaleen hitausmomentin J ja kulmanopeuden ω tuloa

$$L = J\omega$$

kutsutaan pyörivän kappaleen pyörimismääräksi eli liikemäärämomentiksi L.

Oppilastyö ▪ Pyörimismäärän säilyminen

Istu punnukset käsissäsi herkästi pyörivään työtuoliin. Ojenna kädet ja jalat sivuille. Pyöräytä tuoli pyörimään. Vedä jalkasi koukkuun ja punnukset vartalosi lähelle. Ojenna hetken päästä kätesi ja jalkasi suoriksi. Tarkkaile kulmanopeuden muutosta.

Hitausmomentti suuri, kulmanopeus pieni.

Hitausmomentti pieni, kulmanopeus suuri.

Oppilastyössä huomataan, että pyörimisnopeus kasvaa, kun punnukset vedetään lähelle vartaloa ja sivulle ojennetut jalat vedetään koukkuun. Vastaavasti pyörimisnopeus pienenee, kun punnukset ja jalat viedään takaisin etäämmälle. Ilmiö on esimerkki pyörimismäärän säilymislaista.

Pyörimismäärän säilymislaki
Jos systeemiin vaikuttava ulkoinen kokonaismomentti on nolla, systeemin pyörimismäärä säilyy eli $L = J\omega$ on vakio.

Pyörimismäärän säilymislain mukaan tulon $J\omega$ arvo pysyy aina samana. Jos alussa systeemin kulmanopeus on ω_a ja hitausmomentti J_a ja lopussa ω_l ja J_l, silloin pyörimismäärän säilymislaki voidaan esittää muodossa

$$J_a\omega_a = J_l\omega_l.$$

Useasta toistensa suhteen liikkuvasta osasta koostuvassa systeemissä voivat sekä kulmanopeus ω että hitausmomentti J muuttua. Pyörimismäärän säilymislain mukaan niiden tulo pysyy muuttumattomana, jos systeemiin vaikuttava ulkoinen kokonaismomentti on nolla. Jäykän yksittäisen kappaleen hitausmomentti pysyy aina samana. Kun kyse on jäykästä kappaleesta, pyörimismäärän säilyminen tarkoittaa sitä, että kappaleen kulmanopeus pysyy vakiona, jos kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien momentti on nolla.

Kun freestylehiihtäjä hypyssään kiertää suksiaan ja alavartaloaan, hänen ylävartalonsa kiertyy samalla vastakkaiseen suuntaan niin, että kokonaisuudessaan pyörimismäärä säilyy. Ilmassa freestylehiihtäjään vaikuttavien ulkoisten momenttien summa on likimain nolla, joten pyörimismäärä säilyy. Jos freestylehiihtäjä haluaa pyöriä vaakatasossa ilmalentonsa aikana, hänen on aloitettava kiertoliike ponnistuksen aikana ennen ilmalentoa. Uimahyppääjä nopeuttaa volttiaan menemällä tiukalle kerälle. Pyöriminen kiihtyy, koska hitausmomentti on keräasennossa pienempi kuin avonaisessa asennossa.

Liikemäärän säilymislaki on voimassa etenemisliikkeen törmäyksissä. Pyörimismäärän säilymislaki on voimassa pyörivien kappaleiden törmäyksissä. Kuvassa on kaksi törmäävää galaksia. Galaksien liike on pyörimistä.

Pyörimismäärän säilymislaki on yleispätevä luonnonlaki, energian ja liikemäärän säilymislakien tavoin. Se koskee yhtä lailla pieniä kuin suuria järjestelmiä. Elektronin kiertoliike ytimen ympärillä noudattaa sitä, samoin Linnunradan ja muiden galaksien pyörimisliike. Kun tähti kehityksensä jossain vaiheessa tiivistyy, sen hitausmomentti pienenee. Pyörimismäärän säilymislain mukaisesti tähden pyörimisnopeus kasvaa samalla niin, että suureen $L = J\omega$ arvo ei muutu. Tähtitieteilijät ovat löytäneet lukuisia suurista tähdistä syntyneitä, vimmatusti pyöriviä ja hyvin tiiviitä neutronitähtiä.

Pyörimismäärän säilymislaki selittää oppilastyössä havaitut kulmanopeuden muutokset. Kun opiskelija veti oppilastyössä jalkansa ja käsissään olevat punnukset vartaloaan kohti lähemmäksi pyörimisakselia, hänen hitausmomenttinsa J pieneni, koska massa siirtyi lähemmäksi pyörimisakselia. Koska pyörimismäärä $L = J\omega$ säilyi, kulmanopeus ω kasvoi vastaavasti. Kun opiskelija suurensi hitausmomenttiaan ojentamalla raajansa ja viemällä punnukset kauemmaksi pyörimisakselista, kulmanopeus pieneni.

Esimerkki 6

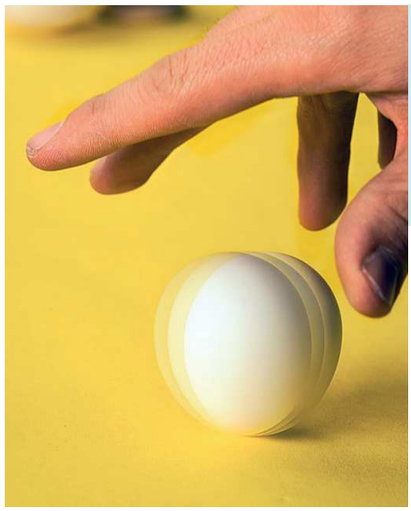
Taitoluistelija pyörii pyörimisnopeudella 1,0 r/s jalat ja kädet levällään. Aloittaessaan piruetin hän nopeuttaa pyörimistään vetämällä kätensä ja jalkansa lähelle vartaloaan, jolloin hänen pyörimisnopeudekseen mitataan 2,5 r/s. Vertaa toisiinsa luistelijan hitausmomentteja liikkeen alussa ja piruetin aikana. Oletetaan vastusvoimat pieniksi.

$n_a = 1{,}0$ r/s, $\quad n_b = 2{,}5$ r/s

Kun jätetään huomiotta luistimien ja jään välinen kitka ja ilmanvastus, luistelijaan ei vaikuta minkään ulkoisen voiman momentti. Siksi hänen liikkeessään pyörimismäärä $L = J\omega$ säilyy eli pyörimismäärä ennen piruettia ja piruetin aikana on sama: $J_a\omega_a = J_b\omega_b$. Tästä seuraa, että hitausmomentti piruetin aikana on

$$J_b = \frac{\omega_a}{\omega_b} J_a = \frac{2\pi n_a}{2\pi n_b} J_a = \frac{2\pi \cdot 1{,}0 \text{ r/s}}{2\pi \cdot 2{,}5 \text{ r/s}} J_a = 0{,}40 J_a .$$

Luistelijan hitausmomentti piruetin aikana on 40 % hänen piruettia edeltäneestä hitausmomentistaan.



Oppilastyö ▪ Kananmunan pyöritys

Pane raaka ja keitetty kananmuna pöydälle. Pyöräytä kumpikin samalla tavalla pyörimään kärkensä varassa. Mistä tiedät munia rikkomatta, kumpi munista on keitetty?

Oppilastyössä keitetty kananmuna pyörii hyvin ja raaka huonosti. Keitetty kananmuna pyörii hyvin, koska sormien voiman momentti antaa kananmunalle suuren pyörimismäärän. Pyörimismäärä lähes säilyy, sillä liikevastusvoimien momentit ovat pieniä ja munan kulmanopeus pienenee hitaasti. Koska pyörimismäärä on vektorisuure, myös pyörimisakselin suunta säilyy. Koska kananmunaa on vaikea saada pyörimään täysin pystysuorassa asennossa, massakeskipisteeseen kohdistuva paino aiheuttaa vääntömomentin, joka ilmenee pyörimisakselin suunnan muuttumisena eli prekessioliikkeenä.

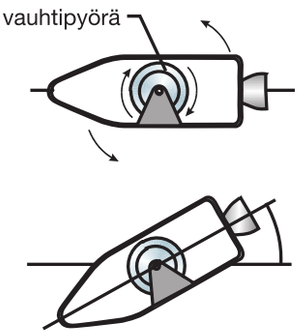
Raa'an kananmunan sisällä on tahmeaa nestettä, joka ei lähde pyörimään nopeassa pyöräytyksessä. Suurin osa pyöräytykseen käytetystä energiasta muuntuu nestemäisen sisällön kitkan takia sisäenergiaksi ja vain vähäinen osa mekaaniseksi rotaatioenergiaksi. Siten pyörimismäärä on pieni ja painon momentti saa munan kaatumaan nopeasti.

Pohdi ja etsi

4-19. a) Miten uimahyppääjä ehtii tehdä ilmassa useita voltteja, vaikka hyppy kestää vain vähän aikaa?
b) Miten uimahyppääjä hidastaa pyörimistään ilmalennon lopussa ennen veteen putoamista?
c) Miten taitoluistelija saa itsensä vinhaan pyörimisliikkeeseen pituusakselinsa ympäri?

4-20. a) Miksi tähden luhistuessa neutronitähdeksi sen pyörimisnopeus voi kasvaa jopa yli miljoonakertaiseksi?
b) Helikopterihypyssä (twisterissä) kumparelaskija kiertää ylävartaloa ja suksia eri suuntiin. Miksi hänen on mahdotonta kääntää molempia samanaikaisesti samaan suuntaan?
c) Miksi kiväärin piipun rakenne on sellainen, että siitä lähtevä luoti pyörii pituusakselinsa ympäri? [K2005, 12]

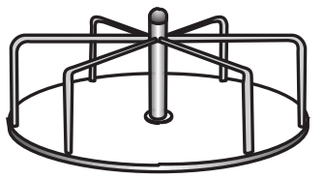
4-21. Mihin perustuu avaruusaluksen suunnan muuttaminen aluksen sisällä olevan vauhtipyörän (roottorin) avulla?



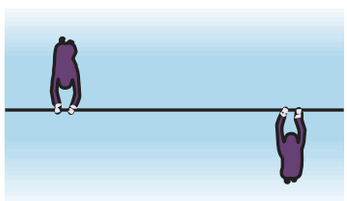
4-22. Miten arvelet napajäätiköiden sulamisen vaikuttavan Maan pyörimiseen ja päivän pituuteen?

Tehtäviä

4-23. Kaksi fysiikan tunnilta tulevaa lukiolaista päätti testata pyörimisliikkeen lakeja leikkikentän karusellissa. Herkästi laakeroidun karusellin säde on 1,8 m ja hitausmomentti pyörimisakselin suhteen 280 kgm^2. Aluksi pojat, joiden massat olivat 53 kg ja 58 kg, olivat karusellin ulkoreunalla ja vauhdittivat sen kierrostaajuuteen 20 1/min. Tämän jälkeen he siirtyivät samanaikaisesti 0,40 m:n etäisyydelle karusellin keskipisteestä. Kuinka suuri oli kierrostaajuus siirtymisen jälkeen? Kuinka paljon ja minkä vuoksi systeemin pyörimisenergia muuttui poikien siirtyessä? [S1998, 12]



4-24. Kaksi taitoluistelijaa, joiden molempien massa on 50 kg ja vauhti 1,4 m/s, luistelee vastakkaisiin suuntiin 3,0 m:n etäisyydellä toisistaan. Kun he ottavat kiinni keskeltä akseloidun kevyen riman päistä, he alkavat pyöriä riman keskipisteen ympäri.
a) Mikä on ympyräradan säde?
b) Laske luistelijoiden kulmanopeus.
c) Laske kahden luistelijan muodostaman systeemin pyörimisenergia.
d) Luistelijat vaihtavat samanaikaisesti otettaan rimasta siten, että heidän etäisyytensä on enää 0,50 m keskikohdasta. Mikä nyt on kulmanopeus ja pyörimisenergia?
e) Miten on mahdollista, että energian määrä muuttui?



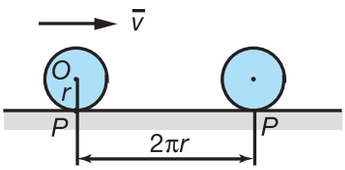
Pillerinpyörittäjä kuljettaa lantapalloa vierittämällä, koska vierimisvastus on paljon pienempi kuin kitka.

4.3 Vieriminen

Oppilastyö ▪ Vieriminen kaltevalla tasolla

Rakenna kalteva taso. Laita tason yläreunaan ontto suoran ympyrälieriön muotoinen kappale, umpinainen suoran ympyrälieriön muotoinen kappale ja umpinainen pallo, joiden kaikkien säteet ovat likimain samansuuruiset. Päästä kappaleet yhtä aikaa vierimään tasoa alas ja vertaa kappaleiden vierimisen nopeutta. Pohdi hitausmomentin vaikutusta vierimiseen.

Kun pyörivä kappale etenee alustalla niin, että se ei luista alustan suhteen, sen liikettä sanotaan **vierimiseksi**. Esimerkiksi polkupyörä ja auto etenevät suurimman osan aikaa niin, että niiden pyörät vierivät tienpintaa pitkin. Vain jarrutettaessa ja kiihdytettäessä pyörät saattavat osittain luistaa tienpinnan suhteen. Lukkojarrutuksessa pyörät eivät pyöri lainkaan ja auto tai polkupyörä etenee liukumalla.



Eteneminen yhden pyörähdyksen aikana.

Vierimisessä yhdistyy kaksi liikettä: etenemisliike ja pyörimisliike. Kun vierivä pyörä tekee yhden kierroksen, se kulkee samalla eteenpäin kehänsä pituisen matkan $s = 2\pi r$, jossa r on pyörän säde. Jos pyörähdysaika on T, saadaan pyörän etenemisnopeudeksi tien suhteen $v = \frac{s}{T} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi}{T} r$, jos pyöriminen on ta-

saista. Pyörän painopiste etenee tällä nopeudella. Koska pyörän kiertokulman muutos yhden kierroksen aikana on $\Delta\varphi = 2\pi$ rad, pyörän kulmanopeus on $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Kun vertaamme tätä etenemisliikkeen nopeuden $v = \frac{2\pi}{T}r$ lausekkeeseen, voimme todeta, että vierimisliikkeessä etenemisnopeuden v ja kulmanopeuden ω kesken on voimassa $v = \omega r$.

Vierimisehto
Vierimisliikkeessä kappaleen etenemisnopeus v ja kulmanopeus ω toteuttavat vierimisehdon

$$v = \omega r.$$

Koska vierimisessä pyörä ei liu'u alustan suhteen, pyörän tienpintaa koskettava piste on kosketushetkellä levossa tienpinnan suhteen. Kiihdytettäessä pyörän etenemisnopeus voi olla pienempi kuin renkaan ratanopeus, $v < v_r = \omega r$, ja rengas "sutii" tienpinnalla. Jarrutettaessa renkaan etenemisnopeus on suurempi kuin ratanopeus, $v > v_r = \omega r$, ja renkaan kosketuspiste liukuu tienpinnan suhteen. Vierimisehto ei ole voimassa näissä kummassakaan tapauksessa.

Vierimisliikkeelle on voimassa nopeuden ja kulmanopeuden välisen vierimisehdon lisäksi vastaava ehto matkan s ja kiertokulman φ välillä sekä kiihtyvyyden a ja kulmakiihtyvyyden α välillä.

Vierimisehdot
Kappaleen vierimiselle ovat voimassa seuraavat ehdot:

$s = \varphi r$
$v = \omega r$
$a = \alpha r.$

Keilaradan alkuosa saattaa olla niin liukas, että keilapallo liukuu radalla. Radan loppuosassa kitkakerroin on suurempi ja liukuminen muuttuu vierimiseksi. Taitavat keilaajat tietävät, että vierien etenevää palloa voi parhaiten ohjailla kiertein.

Vierivän kappaleen energia

Vierivän kappaleen liike-energia koostuu koko kappaleen etenemisen liike-energiasta $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ja massakeskipisteen kautta kulkevan akselin ympäri tapahtuvan pyörimisliikkeen liike-energiasta $E_r = \frac{1}{2}J\omega^2$.

Vierivän kappaleen liike-energia
Vierivän kappaleen kokonaisliike-energia $E_{k,kok}$ on etenemisliikkeen ja pyörimisliikkeen liike-energioiden summa

$$E_{k,kok} = E_k + E_r = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Kun kappale vierii alas kaltevaa pintaa pitkin, osa kappaleen potentiaalienergiasta muuntuu etenemisliikkeen liike-energiaksi ja osa pyörimisliikkeen liike-energiaksi. Mitä suurempi kappaleen hitausmomentti J on, sitä suurempi on pyörimisliikkeen liike-energiaksi muuntuva osa. Oppilastyössä huomattiin, että onton sylinterin etenemisnopeus oli pienempi kuin umpinaisen sylinterin etenemisnopeus. Sivun 90 piirroksista näemme, että onton sylinterin hitausmomentti ($J = mr^2$) on suurempi kuin umpinaisen sylinterin hitausmomentti $\left(J = \frac{1}{2}mr^2\right)$. Umpinaisen pallon hitausmomentti $\left(J = \frac{2}{5}mr^2\right)$ on pienempi kuin kummankin sylinterin hitausmomentit, joten sen nopeus on näiden nopeutta suurempi. Näistä kolmesta pallo on ensimmäisenä alhaalla, ontto sylinteri viimeisenä.

Jos ilmanvastus ja vierimisvastus jätetään pieninä huomioimatta, voidaan vierimiseen soveltaa mekaanisen energian säilymislakia.

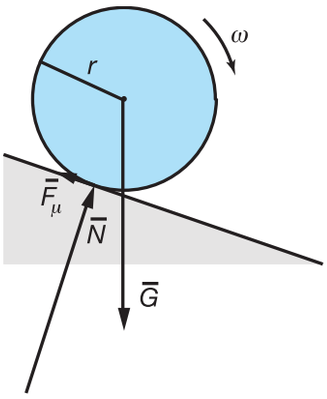
Mekaanisen energian säilyminen vierimisessä
Mekaanisen energian säilymislaki vierimisessä on

$$E_{p,a} + E_{k,a} + E_{r,a} = E_{p,l} + E_{k,l} + E_{r,l}$$

eli

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}J\omega_a^2 = mgh_l + \frac{1}{2}mv_l^2 + \frac{1}{2}J\omega_l^2.$$

Etenemisnopeus ja kulmanopeus toteuttavat vierimisehdon eli $v_a = \omega_a r$ ja $v_l = \omega_l r$, jossa r on vierivän kappaleen säde.



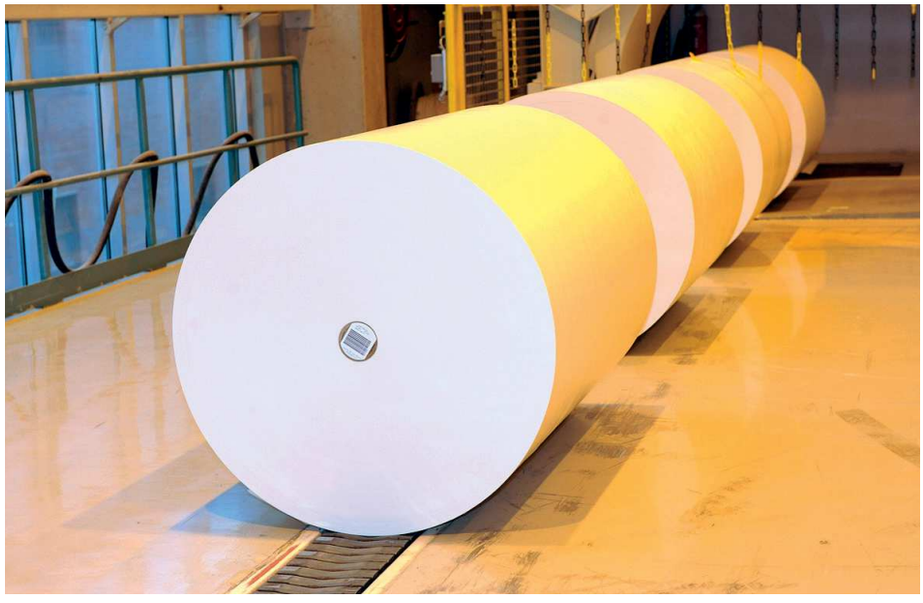
$\bar{G}$ on kappaleen paino.
$\bar{F}_\mu$ on kitka.
$\bar{N}$ on pinnan tukivoima.

Tarkastellaan kaltevalla tasolla vierivää kappaletta työperiaatteen avulla. Vierivään kappaleeseen vaikuttavat voimat ovat paino $\bar{G}$, pinnan tukivoima $\bar{N}$, ilmanvastus $\bar{F}_\text{i}$, vierimisvastus $\bar{F}_\text{v}$ ja lepokitka $\bar{F}_\mu$. Painon $\bar{G}$ tason suuntainen komponentti aiheuttaa kappaleelle kiihtyvyyden tason suunnassa alaspäin. Sen tekemä työ muuntaa osan kappaleen potentiaalienergiasta etenemisliikkeen liike-energiaksi.

Lepokitka $\bar{F}_\mu$ estää kappaleen luistamisen alustan suhteen ja saa kappaleen vierimään. Lepokitkan suunta on etenemissuunnalle vastakkainen. Sillä on momentti kappaleen painopisteen kautta kulkevan akselin suhteen, joten se aiheuttaa kappaleelle liikeyhtälön $M = J\alpha$ mukaisen kulmakiihtyvyyden. Tämän seurauksena osa kappaleen potentiaalienergiasta muuntuu pyörimisliikkeen liike-energiaksi.

Vastusvoimat $\bar{F}_\text{i}$, $\bar{F}_\text{v}$ ja $\bar{F}_\mu$ ovat liikesuuntaa vastaan. Ilmanvastus $\bar{F}_\text{i}$ muuntaa pallon liike-energiaa ilman ja kappaleen sisäenergiaksi. Vierimisvastus $\bar{F}_\text{v}$ hidastaa kappaleen pyörimistä ja etenemistä ja muuntaa kappaleen mekaanista energiaa kappaleen ja pinnan sisäenergiaksi. Ilmanvastus ja vierimisvastus ovat usein niin pieniä muihin voimiin verrattuna, ettei niitä tarvitse ottaa huomioon.

Hitaastikin vierivällä paperirullalla on suuri liike-energia, koska paperirullan massa ja hitausmomentti ovat suuria.



Esimerkki 7

Painopaperirulla, jonka massa on 710 kg, vierii alas kaltevaa ramppia, jonka korkeus on 35 cm. Laske, mikä on rullan painopisteen nopeus rullan saapuessa rampin alareunaan. Painopaperirullaa voi pitää umpinaisena sylinterinä ja vastusvoimia hyvin pieninä.

$h_a = 0{,}35\ \text{m}, \quad m = 710\ \text{kg}, \quad g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Vierimisen aikana osa rullan potentiaalienergiasta muuntuu etenemisliikkeen liike-energiaksi. Lepokitkan aiheuttaman momentin takia rulla pyörii ja osa potentiaalienergiasta muuntuu pyörimisenergiaksi. Koska liikevastukset ovat vähäiset, voimme soveltaa mekaanisen energian säilymislakia:

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}J\omega_a^2 = mgh_l + \frac{1}{2}mv_l^2 + \frac{1}{2}J\omega_l^2.$$

Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi rampin alareuna, jolloin $h_l = 0$ m. Koska kappale lähtee vierimään levosta, on $v_a = 0$ m/s ja $\omega_a = 0$ rad/s. Kun sijoitetaan nämä arvot, mekaanisen energian säilymislaki saadaan muotoon

$$mgh_a = \frac{1}{2}mv_l^2 + \frac{1}{2}J\omega_l^2.$$

Umpinaisen sylinterin hitausmomentti on $J = \frac{1}{2}mr^2$. Vierimisehdosta $v = \omega r$ saadaan $\omega_l = \frac{v_l}{r}$. Mekaanisen energian säilymislaki saa muodon

$$mgh_a = \frac{1}{2}mv_l^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v_l}{r}\right)^2 \text{ ja edelleen}$$

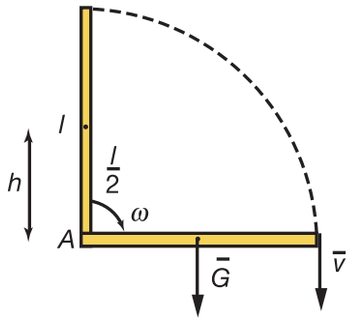
$$mgh_a = \frac{1}{2}mv_l^2 + \frac{1}{4}mv_l^2 = \frac{3}{4}mv_l^2.$$

Loppunopeudeksi saadaan

$$v_l = \sqrt{\frac{4gh_a}{3}} = \sqrt{\frac{4\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}35\ \text{m}}{3}} \approx 2{,}1\ \text{m/s}.$$

Painopaperirullan (painopisteen) etenemisnopeus rampin alareunassa on 2,1 m/s.

Esimerkki 8



Pystysuoran tangon alapäässä on lähes kitkaton sarananivel. Tasapaksun tangon pituus on 3,4 m. Tangon annetaan kaatua. Kuinka suurella nopeudella tangon yläpää osuu vaakasuoraan alustaan? [K1999, 10 osa]

$l = 3{,}4\ \text{m}, \quad g = 9{,}81\ \text{m/s}^2, \quad J = \frac{1}{3}ml^2$ (taulukkokirja)

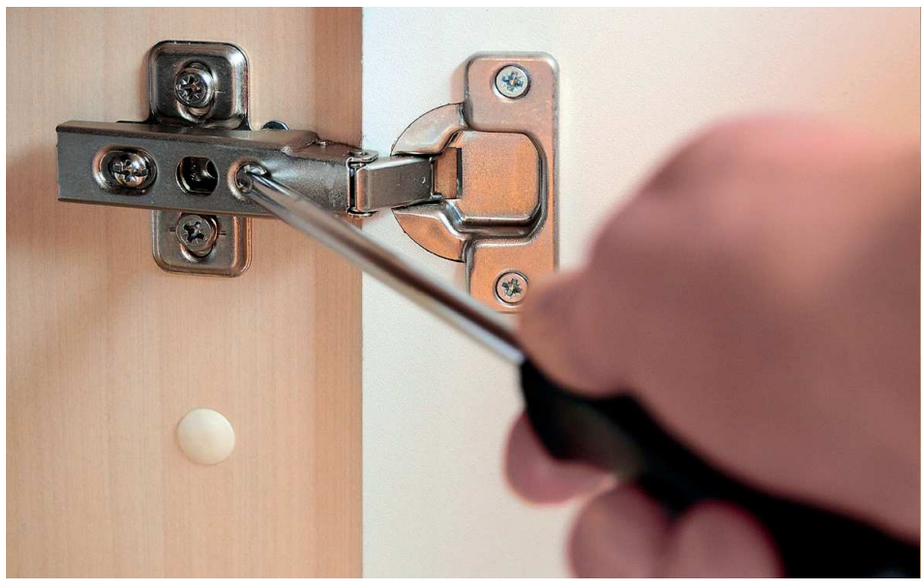
Kun sarana oletetaan kitkattomaksi ja ilmanvastus pieneksi, mekaaninen energia säilyy. Tangon potentiaalienergia muuntuu rotaatioenergiaksi, eli $mgh = \frac{1}{2}J\omega^2$.

Tangon painopisteen ”putoama” matka on $h = \frac{l}{2}$. Yhtälö $v = \omega r$ saa nyt muodon $\omega = \frac{v}{l}$. Niin ollen yhtälö $mgh = \frac{1}{2}J\omega^2$ saadaan muotoon $mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot\frac{v^2}{l^2}$ eli $v^2 = 3gl$.

Tästä saadaan tangon yläpään nopeudelle arvo

$$v = \sqrt{3gl} = \sqrt{3\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 3{,}4\ \text{m}} \approx 10\ \text{m/s}.$$

Tangon yläpään nopeus sen osuessa vaakasuoraan alustaan on 10 m/s.



Saranaa säätämällä voi vaikuttaa oven avautumiseen.

Oppilastyö ▪ Alustan ja kappaleen pintarakenteen vaikutus vierimiseen

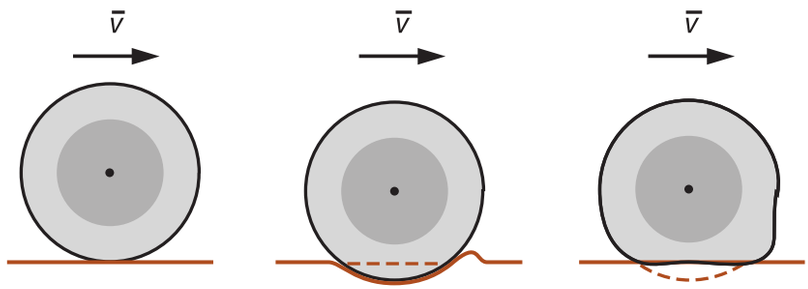
1. Ota raskas metallikuula ja lähetä se vierimään erilaisilla vaakasuorilla pehmeillä ja kovilla alustoilla, joka kerta likimain yhtä suurella alkunopeudella. Vertaa kuulan vierimismatkaa erilaisilla pinnoilla.

2. Ota kaksi raskasta metallikuulaa ja pujota niistä toisen päälle kireä ilmapallo. Pane kuulat vierimään likimain samalla alkunopeudella kovaa alustaa pitkin. Mitä havaitset?

Oppilastyön kohdassa 1 huomattiin, että pehmeillä alustoilla kuula pysähtyi nopeasti ja kovilla alustoilla kuula vieri kauaksi, vaikka kuulan lähtönopeus oli kaikissa tapauksissa likimain sama. Oppilastyön kohdassa 2 huomattiin, että ilmapallolla päällystetty pallo pysähtyi nopeammin kuin kovapintainen pallo.

Vaakasuoralla alustalla vierivän kappaleen liike hidastuu ja lopulta pysähtyy, koska kappaleeseen vaikuttaa **vierimisvastus**.

Vierimisvastus johtuu vierivän kappaleen ja alustan rakenteiden myötäliikkeestä vierimisen aikana. Alusta voi painua kappaleen kosketuskohdassa tai kappale itse voi muuttaa muotoaan, jolloin vieriminen ei ole esteetöntä. Vierimisvastus on yleensä huomattavasti pienempi voima kuin liikekitka.



Esimerkki 9

Petankkikuula, jonka massa on 750 g ja säde 36 mm, vierii vaakasuoralla pihamaalla tasaisesti hidastuen 4,1 m:n matkan ennen pysähtymistään. Kuulan nopeus alussa on 1,1 m/s. Määritä vierimisvastus.

$m = 0{,}75\ \text{kg}, \quad r = 0{,}036\ \text{m}, \quad s = 4{,}1\ \text{m}, \quad v_\text{a} = 1{,}1\ \text{m/s}$

Raskas petankkikuula on pienikokoinen ja sen nopeus on pieni, joten kuulaan kohdistuva ilmanvastus on vähäinen. Vierimisvastus F_v muuntaa liike-energiaa sisäenergiaksi. Eristämättömässä systeemissä ulkoinen työ W muuttaa mekaanista energiaa eli $E_\text{mek,a} + W = E_\text{mek,l}$. Mekaanisen työn määritelmän mukaan vierimisvastuksen tekemä työ on $W = -F_\text{v}s$. Vierivälle kappaleelle mekaniikan energiaperiaate on silloin

$$E_\text{p,a} + E_\text{k,a} + E_\text{r,a} - F_\text{v}s = E_\text{p,l} + E_\text{k,l} + E_\text{r,l}.$$

Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi pihamaan pinta. Tällöin $E_\text{p,a} = E_\text{p,l} = 0$. Koska petankkikuula pysähtyy lopussa, on $E_\text{k,l} = E_\text{r,l} = 0$. Mekaanisen energian säilymislaki saa muodon

$$\frac{1}{2}mv_\text{a}^2 + \frac{1}{2}J\omega_\text{a}^2 - F_\text{v}s = 0.$$

Petankkikuula on umpinainen pallo, joten sen hitausmomentti on $J = \frac{2}{5}mr^2$. Vierivälle kappaleelle kulmanopeus on $\omega_\text{a} = \frac{v_\text{a}}{r}$.

Yhtälöstä

$$\frac{1}{2}mv_\text{a}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v_\text{a}}{r}\right)^2 - F_\text{v}s = 0$$

saadaan vierimisvastukseksi

$$F_\text{v} = \frac{\frac{7}{10}mv_\text{a}^2}{s} = \frac{\frac{7}{10}\cdot 0{,}75\ \text{kg}\cdot(1{,}1\ \text{m/s})^2}{4{,}1\ \text{m}} \approx 0{,}15\ \text{N}.$$

Vierimisvastus on 0,15 N.

Pohdi ja etsi

4-25. Miksi tynnyriä on helpointa liikuttaa vierittämällä?

4-26. Miksi lentokoneen renkaista pöllähtää savua, kun lentokone laskeutuu kiitoradalle? Miten savun muodostuminen voitaisiin estää?

4-27. Kahdella metallipallolla on sama säde ja massa. Toinen palloista on ontto. Kuinka saat selville palloja rikkomatta, kumpi on ontto? [S1993, 4 (osa)]

4-28. a) Kaltevaa tasoa pitkin päästetään pyörimään umpinainen sylinteri ja ohutseinäinen sylinteri. Kumpi on aikaisemmin alhaalla? Miksi?
b) Samat sylinterit saapuvat kaltevalta tasolta vaakasuoralle pöydälle. Kummankin sylinterin liikettä vastustavat voimat ovat yhtä suuret. Kumpi sylinteri vierii kauemmaksi?

4-29. Miksi liukkaalla kelillä kaaduttaessa olisi hyvä yrittää pyörähtää maahan osuttaessa?

Tehtäviä

4-30. Koripallo, jonka säde on 0,12 m, pyörii nopeudella 2,0 r/s ja etenee lattiaa pitkin nopeudella 3,0 m/s. Luistaako pallo lattian suhteen?

4-31. Pyöräilijä ajaa nopeudella 9,0 km/h. Pyöräilijän ja polkupyörän yhteismassa on 78 kg, ja kummankin pyörän massa on 1,5 kg. Laske pyöräilijän ja polkupyörän kokonaisliike-energia. Voit käyttää pyörien mallina ohutta ympyrärengasta.

4-32. Umpinainen lieriö, jonka massa on 2,0 kg ja säde 6,0 cm, vierii alas kaltevaa tasoa, jonka kaltevuuskulma on 26°. Mikä on levosta lähteneen lieriön etenemisnopeus, kun lieriö on vierinyt 5,0 m?

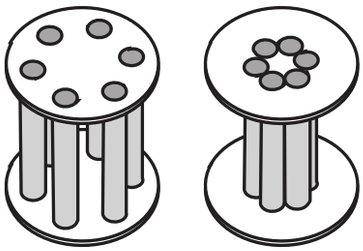
4-33. Pallo alkaa vieriä (liukumatta) alas tasoa, jonka kaltevuuskulma on 25°.
a) Selitä voimakuviota käyttäen, miksi pallo lähtee vierimään eikä liukumaan.
b) Kuinka suuri on pallon nopeus, kun se on vierinyt 1,5 m? [K2008, 6]

4-34. Koripallo, jonka massa on 0,62 kg, vierii lattiaa pitkin liukumatta nopeudella 0,12 m/s. Se törmää seinään ja vierii sen jälkeen liukumatta takaisin tulosuuntaansa nopeudella 0,080 m/s. Kuinka paljon pallon mekaaninen energia pieneni törmäyksessä? Säilyikö kokonaisenergia törmäyksessä?

4-35. Minigolfradalla umpinaisen pallon nopeus on 2,5 m/s ennen pallon joutumista radan nousevalle osalle. Tason kaltevuuskulma on 55°, ja tason ylimmän kohdan korkeus on 75 cm. Pääseekö pallo tämän kohdan yli?

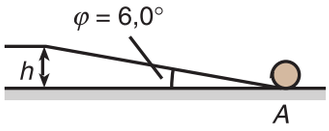
4-36. Umpinainen sylinteri ja ohutseinäinen pitkä putki lähtevät vierimään 1,7 m:n korkeudelta kaltevaa tasoa pitkin maahan. Putken massa ja säde ovat samat kuin sylinterillä. Millä nopeudella a) putki b) sylinteri tavoittaa maanpinnan? Mistä nopeuksien ero johtuu?

4-37. Oheisen kuvan esittämiä rullia käytetään demonstroitaessa hitausmomentin vaikutusta vierimisliikkeeseen. Samanmassaiset rullat koostuvat samanlaisista päätylevyistä ja kuudesta identtisestä terässauvasta.
a) Kumman rullan hitausmomentti on suurempi?
b) Rullat päästetään vierimään ilman alkunopeutta alas samaa kaltevaa tasopintaa. Kumpi vierii nopeammin?
c) Rullat pannaan vierimään samalla alkunopeudella vaakasuoraa pintaa pitkin. Kumpi vierii pidemmän matkan ennen pysähtymistään? [K1997, 12]

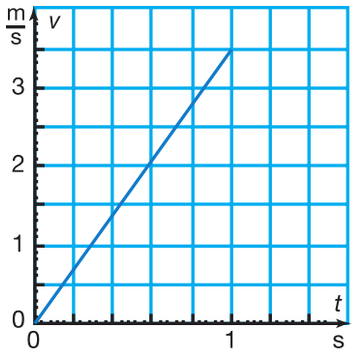


1 2

4-38. 60,0 kg:n massainen rengas on kitkattomasti mutta liukumatta pyörinyt alas 8,0 m pitkän kaltevan tason, jonka kaltevuuskulma on 6,0°. Renkaan halkaisija on 0,70 m ja hitausmomentti tässä pyörimisessä 7,4 kgm^2. Montako kierrosta sekunnissa on renkaan pyörimisnopeus sen ohittaessa pisteen *A*? [Lääk. 1996]



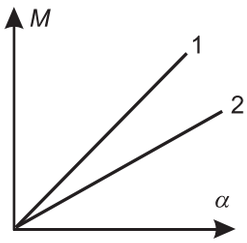
4-39. Kappale, jonka massa on 0,500 kg ja halkaisija 6,00 cm, vierii (liukumatta) alas kaltevaa tasoa. Tason kaltevuuskulma on 30°. Kuvaajassa esitetään kappaleen nopeus ajan funktiona.
a) Laske kappaleen tangenttikiihtyvyys ja kulmakiihtyvyys.
b) Kirjoita kappaleen etenemisen liikeyhtälö.
c) Mitkä voimat aiheuttavat kappaleeseen väntömomentin?
d) Laske kappaleen hitausmomentti.
e) Minkä muotoinen vierivä kappale on?



Testaa, osaatko

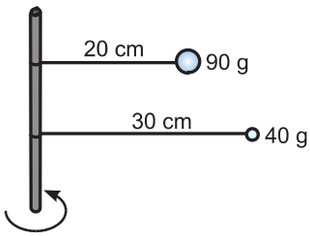
Oikeita vastausvaihtoehtoja voi olla yksi tai useampia.

1. Kahden samansäteisen umpinaisen kiekon pyörimistä keskipisteensä ympäri tutkittiin. Kiekkojen kulmakiihtyvyys riippui kiekkoon vaikuttavasta momentista seuraavasti. Millaiset kiekkojen massat olivat?



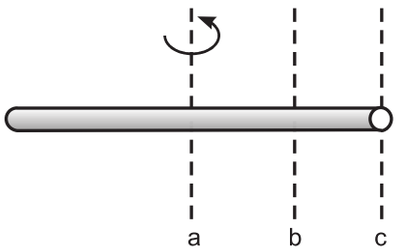
a) Kiekko 1 oli kevyempi.
b) Kiekot olivat samanmassaiset.
c) Kiekko 1 oli raskaampi.

2. Pieniä lankaan kiinnitettyjä metallikuulia pyöritetään vaakatasossa. Kummalla kuulista on suurempi hitausmomentti?



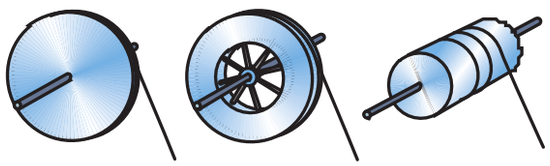
a) Kevyemmällä kuulalla on suurempi hitausmomentti.
b) Hitausmomentit ovat yhtä suuret.
c) Raskaammalla kuulalla on suurempi hitausmomentti.

3. Minkä pyörimisakselin suhteen sauvalla on suurin hitausmomentti?



4. Kuvassa olevien kappaleiden massat ovat yhtä suuret. Millä niistä on suurin hitausmomentti?

a) b) c)



5. Yhtälö $\sum M = J\alpha$
a) on pyörimisen liikeyhtälö
b) on momentin määritelmä
c) vastaa Newtonin II lakia pyörimisliikkeelle.

6. Hitausmomentin yksikkö on
a) 1 kgm
b) 1 kgm^2
c) 1 Nm.

7. Voimistelija haluaa tehdä nopean voltin. Silloin hänen kannattaa
a) hypätä suorin vartaloin
b) koukistua kerälle
c) pienentää hitausmomenttiaan, jotta kulmanopeus suurenisi.

8. Äänilevy pyörii tasaisesti levylautasella. Kun äänilevyn päälle pudotetaan toinen levy, pyöriminen
a) pysyy samanlaisena
b) nopeutuu
c) hidastuu.

9. Kädestä levosta alaspäin päästetty jojo
a) on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä
b) vierii narun suhteen
c) putoaa alaspäin, jolloin sen potentiaalienergiaa muuntuu etenemisen ja pyörimisen liikeenergiaksi.

10. Kappale vierii, kun
a) lepokitka
b) liukukitka
c) vierimisvastus
estää kappaleen luistamisen alustalla.

Tiivistelmä

- Pyörimisen liikeyhtälö: $\sum M = J\alpha$

- Massapisteistä koostuvan systeemin hitausmomentti: $J = \sum m_i r_i^2$. Hitausmomenttiin vaikuttavat kappaleen muoto, massa ja massan sijainti pyörimisakselin suhteen.

- Pyörimisliikkeen liike-energia eli rotaatioenergia on $E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} J\omega^2$.

- Jos ulkoisten voimien momentti on nolla, kappaleen pyörimismäärä $L = J\omega$ säilyy.
  $J_\mathrm{a}\omega_\mathrm{a} = J_\mathrm{l}\omega_\mathrm{l}$ (a = alussa ja l = lopussa)

- Kun kappale etenee vierimällä, vierimisehdot $s = \varphi r$, $v = \omega r$ ja $a = \alpha r$ toteutuvat.

- Kun liikevastuksia ei huomioida, vierivän kappaleen mekaaninen energia säilyy eli

$$mgh_\mathrm{a} + \frac{1}{2} mv_\mathrm{a}^2 + \frac{1}{2} J\omega_\mathrm{a}^2 = mgh_\mathrm{l} + \frac{1}{2} mv_\mathrm{l}^2 + \frac{1}{2} J\omega_\mathrm{l}^2.$$

- Eristämättömässä systeemissä on voimassa

$$mgh_\mathrm{a} + \frac{1}{2} mv_\mathrm{a}^2 + \frac{1}{2} J\omega_\mathrm{a}^2 + W = mgh_\mathrm{l} + \frac{1}{2} mv_\mathrm{l}^2 + \frac{1}{2} J\omega_\mathrm{l}^2.$$

  W on systeemin tekemä tai systeemiin tehty ulkopuolinen työ.

5 Gravitaatio

Tässä luvussa opit
- **Keplerin lait**
- **gravitaatiolain**
- **taivaankappaleiden liikkeen tarkastelua**

Keskeisiä käsitteitä ovat
- **gravitaatiovoima**
- **gravitaatiokenttä**
- **gravitaatiovakio.**

Gravitaatio on perusvuorovaikutus

Gravitaatio on yksi neljästä maailmankaikkeuden rakennetta ja toimintaa selittävästä perusvuorovaikutuksesta. Gravitaatiossa kahteen vuorovaikuttavaan kappaleeseen kohdistuu yhtä suuret vastakkaissuuntaiset gravitaatiovoimat; gravitaatiovoima aiheutuu kappaleiden massasta. Gravitaatiovuorovaikutus on etävuorovaikutus. Gravitaatiovoima on vetovoima. Gravitaatiosta ja gravitaatiovoimasta käytetään myös nimitystä painovoima.

Isaac Newton loi gravitaation teorian. Teorian mukaan kaikki kappaleet vetävät toisiaan puoleensa, niin maapallo omenaa kuin omena maapalloa. Ajatuksen gravitaatioteoriasta Newton sai nähdessään omenan putoavan maahan. Newtonin vuonna 1687 julkaisema teos *Principia mathematica* mullisti käsitykset liikkeestä ja voimista. Teos sisältää matemaattisen esityksen gravitaatiolle.

Puiden lehtien putoaminen maahan aiheutuu gravitaatiovoimasta. Myös esimerkiksi ihmiset, vesi ja ilmakehä pysyvät Maan pinnalla gravitaation ansiosta. Keihäänheitossa keihään lentorata ja suihkulähteessä suihku kaareutuvat gravitaation vaikutuksesta.

Maa kiertää Aurinkoa gravitaation vaikutuksesta, samoin Kuu Maata. Satelliitit kiertävät Maata lähes ympyrän muotoisia ratoja pitkin. Merkittävin satelliittiin vaikuttava voima on Maan aiheuttama gravitaatiovoima – se on merkityksellisempi kuin Auringon ja Kuun aiheuttama gravitaatiovoima.

Vuorovesi-ilmiö aiheutuu siitä, että Kuun ja Auringon vetovoimat ovat erilaiset maapallon eri puolilla. Kuun vaikutus vuorovesi-ilmiöön on suurempi kuin Auringon, koska Kuu on lähempänä. Vuorovesi-ilmiö on voimakkain silloin, kun Aurinko, Kuu ja Maa ovat samalla akselilla toisiinsa nähden, siis täydenkuun ja uudenkuun aikana. Vuorovesi-ilmiön vaikutuksesta myös maankamara liikkuu hieman.

Albert Einsteinin esittämän yleisen suhteellisuusteorian mukaan gravitaatio aiheutuu avaruuden kaareutumisesta, joka taas aiheutuu kappaleiden massoista ja energioista. Suhteellisuusteoriassa gravitaatiokenttää kuvaa kaareva aika-avaruus, jossa kappaleet kulkevat lyhintä reittiä. Suurten massojen läheisyydessä radat kaareutuvat: esimerkiksi tähdestä tulevan valon rata kaareutuu selvästi, kun valo kulkee läheltä Aurinkoa.

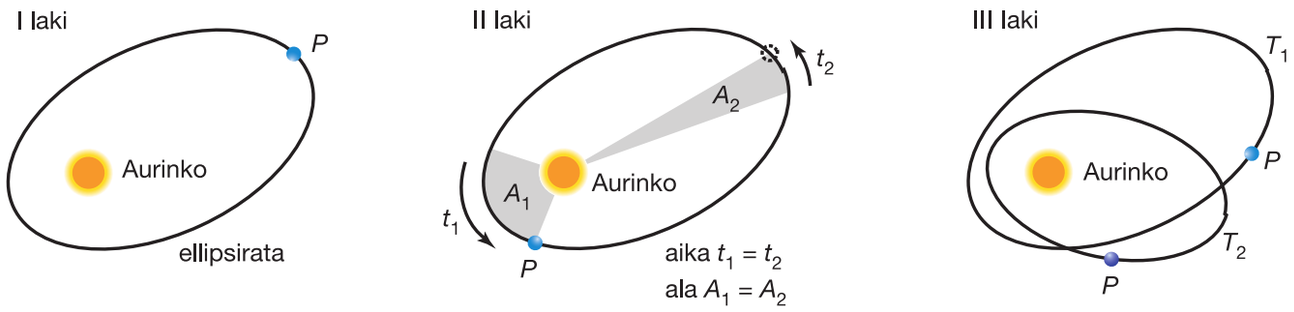
Kun Maa kiertää Aurinkoa ellipsirataa pitkin, sen ratanopeus vaihtelee. Heinäkuussa Maa on kauimpana Auringosta ja sen ratanopeus on pienin. Tammikuussa Maa on lähimpänä Aurinkoa ja sen ratanopeus on suurin.

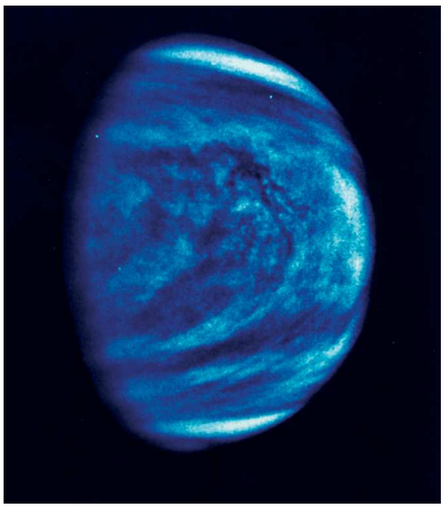
5.1 Keplerin lait

Johannes Kepler (1571–1630) esitti kolme lakia, joita kaikki planeetat Aurinkoa kiertäessään näyttivät noudattavan mittatarkkuuden rajoissa. Kepler löysi nämä lait Tyko Brahen kokeellisen havaintoaineiston avulla. Syvällisemmän selityksen Keplerin laeille antoi Isaac Newton.

Keplerin I laki koskee planeettojen ratojen muotoja, II laki liittyy planeettojen ratanopeuteen ja III lain avulla voidaan laskea planeettojen etäisyyksiä Auringosta.

Keplerin lait
I laki: Planeettojen radat ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä on Aurinko.
II laki: Planeetan liikkuessa sitä Aurinkoon yhdistävä jana pyyhkii yhtä pitkissä ajoissa yhtä suuret pinta-alat.
III laki: Planeettojen kiertoaikojen T (Auringon ympäri) neliöt ovat verrannolliset niiden ja Auringon keskietäisyyksien r kuutioihin, eli $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$. Laki voidaan esittää myös muodossa $T^2 = kr^3$, jossa k on vakio.





Keplerin II lain mukaan kaukana Auringosta ollessaan planeetta kulkee hitaammin ja lähellä Aurinkoa ollessaan nopeammin. Planeetan ratanopeus ei siis ole vakio. Keplerin III lain mukaan kaukaisten planeettojen kiertoaika Auringon ympäri on pitempi kuin lähellä olevien planeettojen. Huomaa, että piirroksissa ratojen elliptisyyttä on liioiteltu: planeettojen radat ovat todellisuudessa lähes ympyrän muotoisia.

Kun Maa on radallaan kiertänyt yhden kierroksen Auringon ympäri, Keplerin III lain mukaisesti Venus on kiertänyt 1,6 kierrosta. Samassa ajassa Jupiter on kiertänyt vain 0,08 kierrosta.

Esimerkki 1

Keplerin III lain avulla voidaan laskea mm. planeettojen keskietäisyydet Auringosta. Maan sideerinen (mitattu) kiertoaika Auringon ympäri on 1,0000 a ja Marsin 1,8809 a. Maan keskietäisyys Auringosta on $149{,}6 \cdot 10^6$ km. Laske Marsin keskietäisyys Auringosta.

$T_{\text{Maa}} = 1{,}0000\ \text{a}, \quad r_{\text{Maa}} = 149{,}6 \cdot 10^6\ \text{km}, \quad T_{\text{Mars}} = 1{,}8809\ \text{a}$

Keplerin III laista $\dfrac{T_{\text{Maa}}^2}{T_{\text{Mars}}^2} = \dfrac{r_{\text{Maa}}^3}{r_{\text{Mars}}^3}$ saadaan Marsin keskietäisyydeksi Auringosta

$$r_{\text{Mars}} = \sqrt[3]{\frac{r_{\text{Maa}}^3 T_{\text{Mars}}^2}{T_{\text{Maa}}^2}} = \sqrt[3]{\frac{(149{,}6 \cdot 10^6 \cdot 10^3\ \text{m})^3 \cdot (1{,}8809\ \text{a})^2}{(1{,}0000\ \text{a})^2}}$$

$$\approx 2{,}280 \cdot 10^{11}\ \text{m} = 2{,}280 \cdot 10^8\ \text{km} = 228{,}0 \cdot 10^6\ \text{km}.$$

Marsin keskietäisyys Auringosta on $228{,}0 \cdot 10^6$ km.

Kuvassa on Johannes Keplerin muistomerkki Itävallassa.

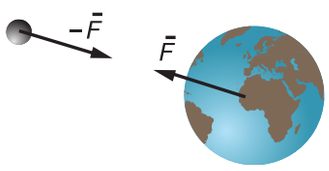
5.2 Gravitaatiolaki

Isaac Newtonin ensimmäinen gravitaatiota koskeva päätelmä oli seuraava:

> Planeettaan vaikuttava gravitaatiovoima suuntautuu kohti Aurinkoa.

Hän päätyi tähän tulokseen Keplerin II lain perusteella. Voimaa, joka suuntautuu aina kohti samaa pistettä, kutsutaan **keskeisvoimaksi**. Gravitaatiovoima on siis keskeisvoima.

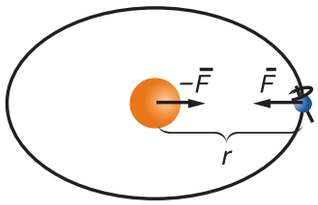
Newton oivalsi, että kappaleeseen kohdistuva paino on gravitaation aiheuttama voima. Hän päätteli gravitaatiovoiman aiheutuvan kahden kappaleen välisestä vuorovaikutuksesta. Hänen toinen johtopäätöksensä oli, että gravitaatiovoima on verrannollinen kummankin kappaleen massaan.



$F \sim m_{\text{Maa}} m_{\text{Kuu}}$

> Kahden kappaleen välinen gravitaatiovoima on verrannollinen kummankin massaan.

Newton osoitti, että radat ovat ellipsejä ja Keplerin kolmas laki toteutuu, jos Auringon ja planeetan välinen voima riippuu tietyllä tavalla niiden välisestä etäisyydestä. Newtonin kolmas päätelmä oli seuraava:



Auringon ja planeetan välinen vetovoima on kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden neliöön.

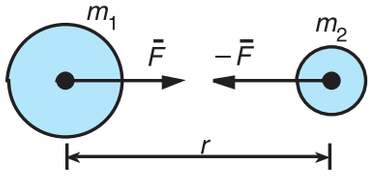
Päätelmiinsä perustuen Newton julkaisi vuonna 1687 yleisen vetovoimalain eli gravitaatiolain.

Newtonin gravitaatiolaki
Kaksi pistemäistä kappaletta, joiden massat ovat m_1 ja m_2 ja joiden välinen etäisyys on r, vetävät toisiaan puoleensa voimalla, joka on suoraan verrannollinen kummankin kappaleen massaan ja kääntäen verrannollinen kappaleiden (painopisteiden) välisen etäisyyden neliöön:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

jossa γ on gravitaatiovakio, $\gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Gravitaatiolaki on yksi fysiikan keskeisimmistä laeista. Se muodostaa muiden mekaniikan peruslakien kanssa klassisen mekaniikan perustan.



Kahden pallon välinen gravitaatiovuorovaikutus.

Aurinko ja planeetat ovat niiden välisiin suuriin etäisyyksiin verrattuna kooltaan pieniä. Siksi niitä voidaan laskuissa pitää pistemäisinä. Newton osoitti, että gravitaatiolaki pätee pallomaisille kappaleille myös riippumatta siitä, kuinka lähekkäin ne ovat. Homogeenisten pallomaisten kappaleiden massan voidaan ajatella olevan pallojen keskipisteessä. Tällöin gravitaatiolaissa esiintyvä etäisyys on kappaleiden keskipisteiden välinen etäisyys.

Kaikki massalliset kappaleet aiheuttavat – niiden muista ominaisuuksista riippumatta – gravitaatiolain mukaisen vetovoiman ja tuntevat muiden kappaleiden aiheuttaman vetovoiman. Gravitaatiovoimalla on käytännössä merkitystä vain, jos ainakin yhden

tarkasteltavaan systeemiin kuuluvan kappaleen massa on suuri. Gravitaatiolaki soveltuukin erityisesti taivaankappaleiden liikkeiden, taivaankappaleiden välisten vetovoimien ja taivaankappaleita ympäröivän gravitaatiokentän tutkimiseen. Maan pinnalla Maan gravitaatiovaikutus ilmenee painona, joka vaikuttaa kaikkien massallisten kappaleiden, myös ihmisten, liikkeisiin.

Esimerkki 2

Kahden samanmassaisen mehupurkin (massa 1,0 kg) massakeskipisteiden välinen etäisyys on 2,0 m.
a) Laske mehupurkkien välinen gravitaatiovoima.
b) Vertaa gravitaatiovoiman suuruutta Maapallon yhteen purkkiin kohdistamaan painoon.

$m_1 = 1{,}0\ \text{kg}, \quad m_2 = 1{,}0\ \text{kg}, \quad r = 2{,}0\ \text{m}, \quad g = 9{,}81\ \text{m/s}^2,$
$\gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$

a) Mehupurkkien välinen gravitaatiovoima on

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{1{,}0\ \text{kg} \cdot 1{,}0\ \text{kg}}{(2{,}0\ \text{m})^2}$$

$$= 1{,}6681 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \approx 17\ \text{pN}.$$

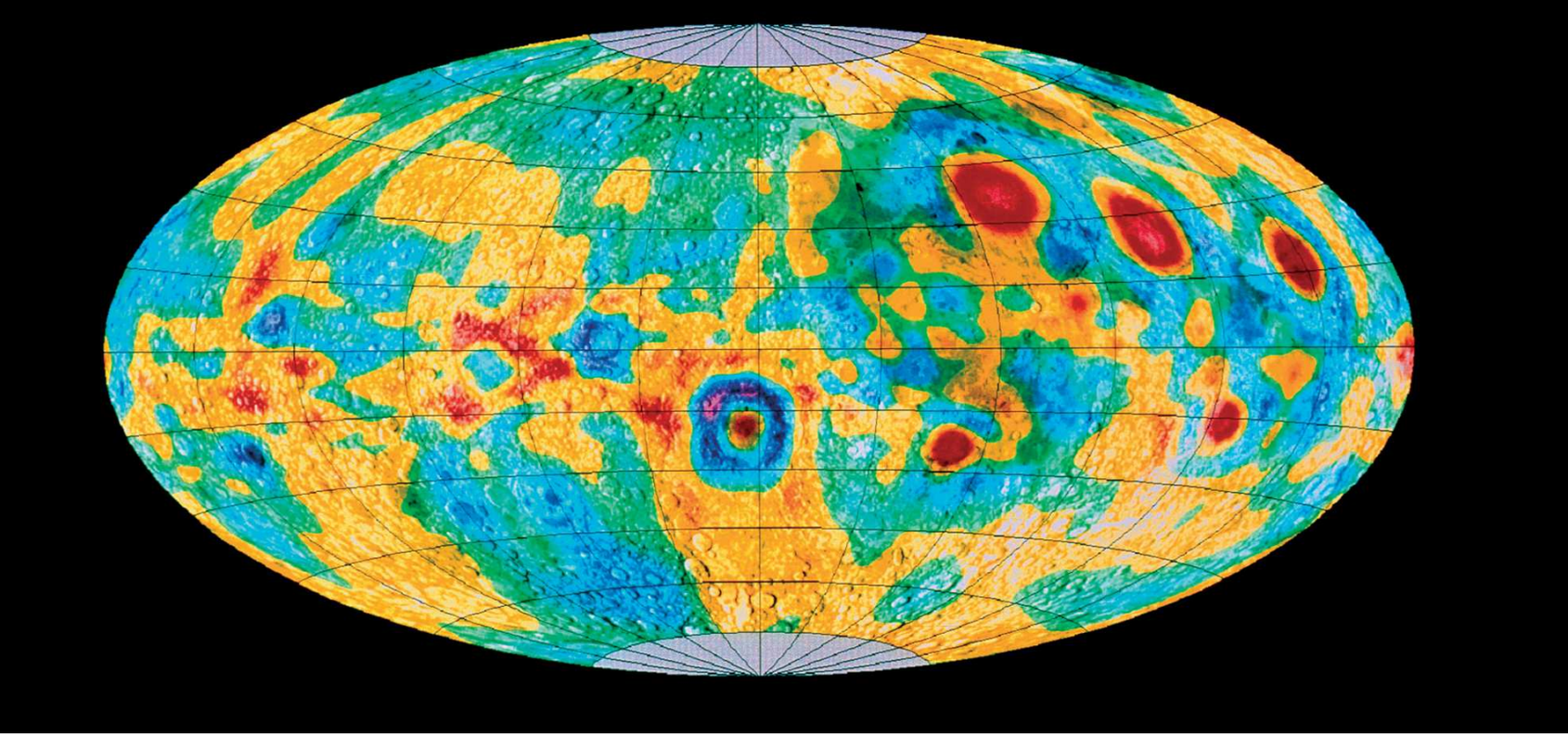
b) Mehupurkkiin kohdistuvan painon suuruus on

$$G = mg = 1{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 9{,}81\ \text{N}.$$

Paino on gravitaatiovoimaan verrattuna noin

$$\frac{9{,}81\ \text{N}}{1{,}6681 \cdot 10^{-11}\ \text{N}} \approx 5{,}9 \cdot 10^{11}\text{-kertainen}.$$

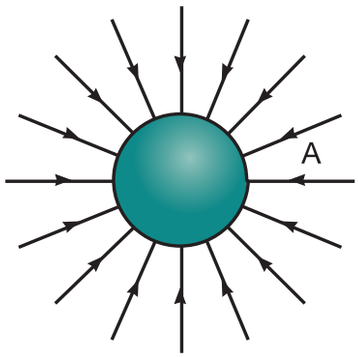
Huomaa: Jos gravitaatiokenttä ei muutu kappaleen kohdalla, kappaleen painopiste on samassa kohdassa kuin kappaleen **massakeskipiste** (massan keskimääräinen paikka). Maan pinnalla gravitaatiokenttää voidaan pitää homogeenisena: näin ollen kappaleen painopiste on likimain massakeskipisteessä. Jos gravitaatiokenttä ei ole homogeninen, kappaleen massakeskipiste on eri kohdassa kuin painopiste.



Kuva esittää Kuun gravitaatiokentän voimakkuutta: oikealla on Maahan näkyvä puoli Kuusta ja vasemmalla Kuun takaosa. Värit kuvaavat laskennallisen ennusteen ja mittaustulosten eroja: keltainen on teoreettisen ennusteen mukainen, punainen on ennustetta suurempi, ja violetti, vihreä ja sininen ovat ennustetta pienempiä.

5.3 Gravitaatiokenttä

Etävuorovaikutuksen kuvaamiseen käytetään klassisessa fysiikassa **kenttää**. Kenttää kuvataan kenttäviivoilla, joiden tiheys kuvaa kentän voimakkuutta. Kenttäviivojen suunta on jokaisessa kentän pisteessä sama kuin kentän voimakkuuden suunta.



Kappale A synnyttää ympärilleen **gravitaatiokentän**, joka aiheuttaa voiman kappaleeseen B. Samanaikaisesti kappale B synnyttää gravitaatiokentän, joka aiheuttaa voiman kappaleeseen A. Gravitaatiokentän voimakkuus riippuu kappaleen massasta sekä etäisyydestä kappaleeseen. Kappaleet tuntevat toistensa aiheuttamat gravitaatiokentät.

Taivaankappaleiden A ja B välillä on gravitaatiovuorovaikutus. Taivaankappaleet, kuten Maa, luovat siis ympärilleen kentän, jonka muut kappaleet tunnistavat. Vuorovaikutus gravitaatiokentässä riippuu gravitaatiokentän voimakkuudesta ja suunnasta kappaleen kohdalla. Kaikki kappaleet niiden massasta riippumatta saavat gravitaatiokentässä saman kiihtyvyyden.

Suurikokoisten taivaankappaleiden, kuten Maan, läheisyydessä olevan kappaleen (massa m) **putoamiskiihtyvyys** g voidaan määrittää Newtonin II lain avulla. Kappaleen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Kun suunta taivaankappaleen keskipisteeseen on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $\gamma \frac{mM}{R^2} = mg$, jossa M on Maan massa. Kappaleen massa m supistuu yhtälöstä. Putoamiskiihtyvyydelle Maan pinnalla (Maan säteen R etäisyydellä Maan keskipisteestä) saadaan yhtälö $g = \gamma \frac{M}{R^2}$.

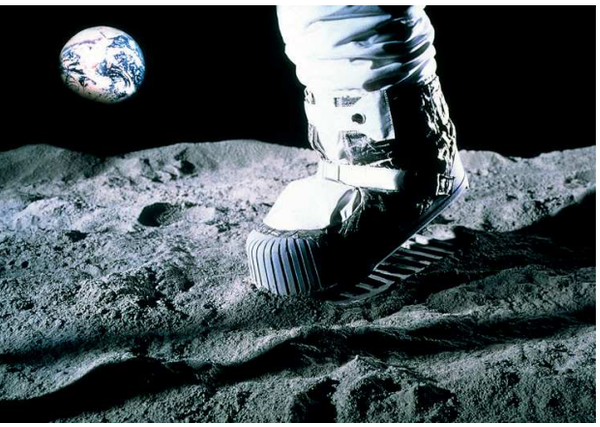
Huomaa, että edellä oletettiin, että gravitaatiolaissa esiintyvä kappaleen massa (”painava massa”) ja Newtonin II laissa esiintyvä massa (”hidas massa”) ovat sama suure. Klassinen fysiikka ei kerro, onko asia todella näin, mutta mittauksissa niiden välillä ei ole havaittu olevan eroa. Suhteellisuusteorian mukaan hidas massa ja painava massa ovat yksi ja sama asia.

Kun etäisyys r Maan keskipisteestä on suurempi kuin Maan säde R, putoamiskiihtyvyydeksi saadaan

$$g_r = \gamma \frac{M}{r^2} = \gamma \frac{MR^2}{R^2 r^2} = \underbrace{\gamma \frac{M}{R^2}}_{=g} \cdot \frac{R^2}{r^2} = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 .$$

Painolla tarkoitetaan gravitaatiovuorovaikutuksen aiheuttamaa voimaa. Kappaleeseen kohdistuva paino on $\overline{G} = m\overline{g}$, jossa m on kappaleen massa ja $\overline{g}$ putoamiskiihtyvyys. Putoamiskiihtyvyyden arvo vaihtelee Maan pinnalla arvojen $g_{\text{napa}} \approx 9{,}83\ \text{m/s}^2$ ja $g_{\text{päiväntasaaja}} \approx 9{,}78\ \text{m/s}^2$ välillä.

SI-järjestelmän mukainen putoamiskiihtyvyyden arvo, jota laskuissa yleensä käytetään, on $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. Kuussa putoamiskiihtyvyys on pienempi kuin Maassa, noin $1{,}6\ \text{m/s}^2$.



Kuun heikomman gravitaatiokentän takia kävely on Kuun pinnalla kevyempää kuin Maan pinnalla. Taustalla kuvassa näkyy Maa.

Putoamiskiihtyvyys ja paino

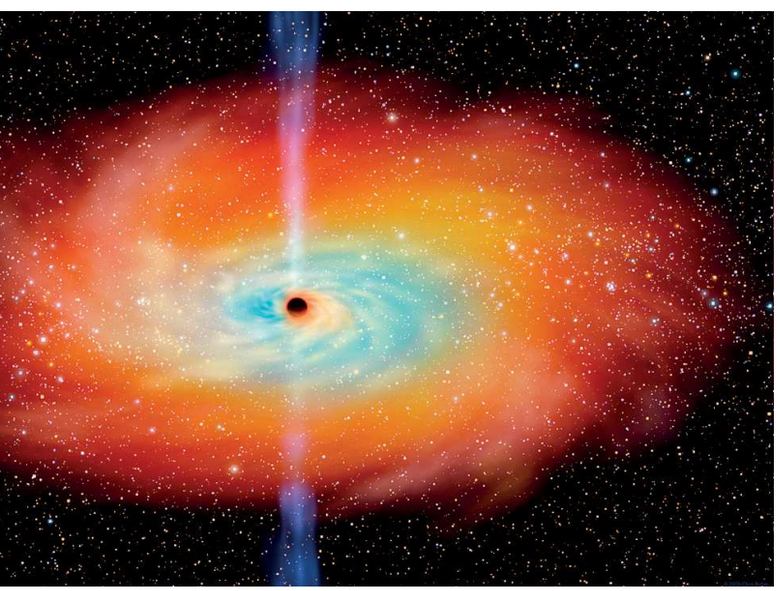
Putoamiskiihtyvyys Maan pinnalla on $g = \gamma \frac{M}{R^2}$, jossa M on Maan massa, R Maan säde ja γ gravitaatiovakio.

Kappaleeseen kohdistuva paino etäisyydellä r Maan keskipisteestä ($r \geq R$) on $G_r = mg\left(\frac{R}{r}\right)^2$.

Gravitaatiokentän voimakkuus tietyssä kentän pisteessä määritellään kentässä olevaan kappaleeseen (massa m) kohdistuvan gravitaatiovoiman ja kappaleen massan osamääränä. Sen suuruus Maan gravitaatiokentässä on $\frac{F}{m} = \frac{\gamma \frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} = g_r$, jossa M on Maan massa. Putoamiskiihtyvyys ilmoittaa siis Maan gravitaatiokentän voimakkuuden.

Maan gravitaatiokentän voimakkuus
Maan gravitaatiokentän voimakkuus etäisyydellä r Maan keskipisteestä on sama kuin putoamiskiihtyvyyden g_r suuruus tällä etäisyydellä.

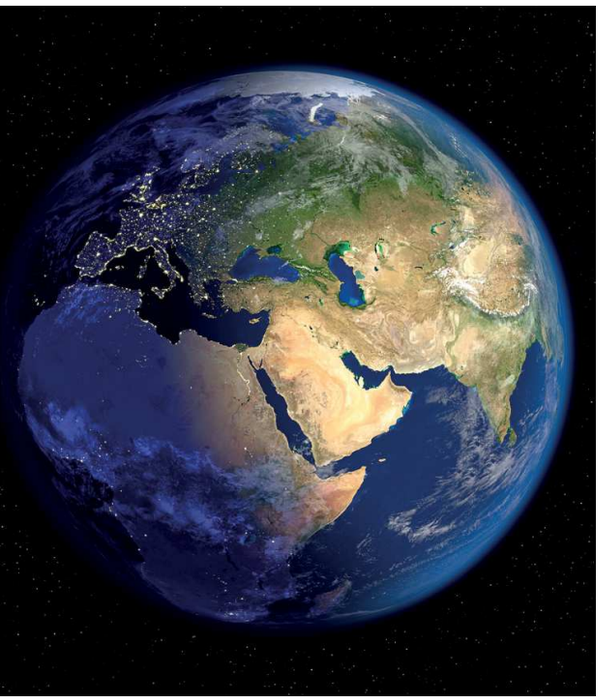
Jos avaruusaluksen kiihtyvyys avaruudessa on 9,81 m/s^2, aluksen sisällä ei voida päätellä mistään, onko alus kiihtyvässä liikkeessä avaruudessa, levossa Maan pinnalla vai tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä Maan pinnalla. Maata kiertävässä tekokuussa ja avaruusaluksessa vallitsee ”painottomuus”, koska alus ja sen matkustajat ovat vapaassa putoamisliikkeessä. Alus ja matkustajat eivät kuitenkaan putoa Maan pinnalle, jos aluksen nopeuden suunta ja suuruus ovat sopivia. Painottomaksi sanotaan tilaa, jossa ei ole tukivoimaa. Painottomuus ei siis tarkoita, että kappaleeseen kohdistuva paino olisi nolla. Avaruuslentäjään kohdistuu avaruudessa, Maata kiertävällä radalla lähes yhtä suuri paino kuin maanpinnalla, mutta koska tukivoimia ei ole, avaruuslentäjä ei aisti painon vaikutusta.



Mustan aukon gravitaatiokenttä on niin voimakas, että se vetää kaiken materian (kuvassa sininen ja punainen) sisäänsä. Kenttä on niin voimakas, että valonsädekään ei pääse karkaamaan aukosta. Mustien aukkojen teoriaa kehittänyt Stephen Hawking painottomassa tilassa.

Taivaankappaleiden, kuten Maan, massa voidaan määrittää tarkastelemalla toisten kappaleiden liikettä taivaankappaleen gravitaatiokentässä. Jos putoamiskiihtyvyys planeetalla tunnetaan, planeetan massa voidaan määrittää. Massa voidaan määrittää myös, kun tiedetään keskustähteä, kuten Aurinkoa, kiertävän planeetan kiertoaika T ja etäisyys r. Vastaavalla tavalla voidaan määrittää planeetan massa sitä kiertävän kuun liikkeen perusteella. Laskuissa Maan säteenä käytetään usein ekvaattorisädettä 6378 km.

Esimerkki 3



Laske Maan massa gravitaatiolain ja Maan pinnalla tunnetun putoamiskiihtyvyyden, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$, avulla.

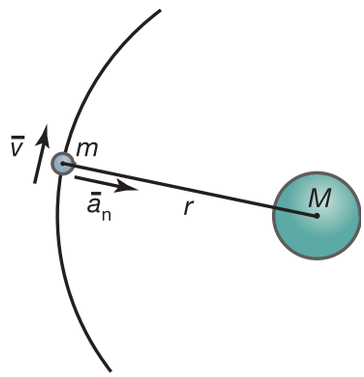
$$R = 6378\ \text{km}, \quad \gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2, \quad g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$$

Tarkastellaan Maan pinnan läheisyydessä olevaa kappaletta, jonka massa on m. Kappaleen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{g}$ ja skalaarimuodossa $\gamma \dfrac{mM}{R^2} = mg$, kun suunta Maan keskipisteeseen on positiivinen.

Maan massaksi saadaan

$$M = \frac{gR^2}{\gamma} = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (6378 \cdot 10^3\ \text{m})^2}{6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2} \approx 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}.$$

Maan massa on $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

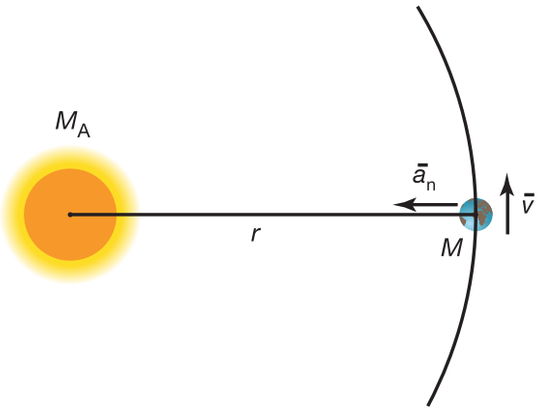


Jos kappaleen liike gravitaatiokentässä on tasaista ympyräliikettä, kappaleen kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyttä ja se suuntautuu radan keskipistettä kohti. Kappaleen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$, jossa m on ympyäradalla olevan kappaleen massa. Kappaleen ratanopeuden suuruus radan säteen r ja kiertoajan T avulla on $v = \dfrac{2\pi r}{T}$.

Esimerkki 4

Osoita laskemalla, että Maan kiertoaika Auringon ympäri on yksi vuosi.

$M_A = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}, \quad r = 149{,}6 \cdot 10^{9}\ \text{m},$
$\gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$



Olkoon Maan massa M ja Auringon massa M_A. Maan liikeyhtälö Aurinkoa kiertävällä radalla on $\sum \overline{F} = M\overline{a}_n$. Kun suunta kohti Auringon keskipistettä on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $\gamma \dfrac{M_A M}{r^2} = M\dfrac{v^2}{r}$, jossa r on Maan keskipisteen keskietäisyys Auringon keskipisteestä. Maan ratanopeus voidaan olettaa vakioksi: $v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\pi r}{T}$. Sijoitetaan ratanopeus $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ yhtälöön $\gamma \dfrac{M_A M}{r^2} = M\dfrac{v^2}{r}$ ja ratkaistaan yhtälöstä Maan kiertoaika T:

$$\gamma \frac{M_A M}{r^2} = M \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$$

$$\gamma \frac{M_A M}{r^2} = M \frac{4\pi^2 r^2}{rT^2}.$$

Huomaa, että Maan massa supistuu. Maan kiertoajaksi Auringon ympäri saadaan

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M_A}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (149{,}6 \cdot 10^9\ \text{m})^3}{6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}}$$

$$= 31{,}5582 \cdot 10^6\ \text{s} \approx 365\ \text{d}.$$

Maan kiertoaika Auringon ympäri on 365 d.

Kansainvälinen ISS (International Space Station) -avaruusasema kiertää Maata noin 400 km:n korkeudella. Yksi kierros kestää noin 92 minuuttia.

Esimerkki 5

Ilmakehää tutkiva satelliitti kiertää Maata ympyräradalla 840 km:n korkeudella Maan pinnasta. Kuinka monta kertaa satelliitti kiertää maapallon vuorokaudessa?

$h = 840\ \text{km}, \quad \gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2, \quad R = 6378\ \text{km},$
$M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$

Radallaan olevan satelliitin liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$. Kun suunta kohti Maan keskipistettä on positiivinen, saadaan skalaarimuoto $\gamma \dfrac{mM}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$, jossa M on Maan massa, m satelliitin massa ja v ratanopeus. Satelliitin ratanopeus on

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{840\ \text{km} + 6378\ \text{km}}}$$
$$= 7431{,}14\ \text{m/s} \approx 7{,}43141\ \text{km/s}.$$

Satelliitin vuorokaudessa kulkema matka on

$$s = vt = 7{,}43141\ \text{km/s} \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s} \approx 642\,074\ \text{km}.$$

Maapallon ympäri kiertävän radan pituus on

$$s = 2\pi r = 2\pi \cdot (840\ \text{km} + 6378\ \text{km}) \approx 45\,352\ \text{km}.$$

Satelliitti kiertää maapallon vuorokaudessa

$$\frac{642\,074\ \text{km}}{45\,352\ \text{km}} \approx 14\ \text{kertaa}.$$

Euroopan ympäristösatelliitti Envisat tutkii maata, merta ja ilmakehää. Osa sen otsonimittauslaitteista on valmistettu Suomessa. Envisat kiertaa Maan ympäri napa-alueiden kautta kerran sadassa minuutissa. Kuvassa Norjan etelärannikkoa.

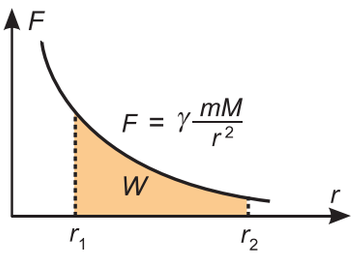
Mekaaninen energia gravitaatiokentässä

Aurinkokunnan mekaaninen energia on taivaankappaleiden liike-energiaa ja niiden välisten gravitaatiovuorovaikutusten potentiaalienergiaa.

Planeettojen pyörimisenergiat ovat pieniä verrattuna muihin mekaanisen energian lajeihin. Siksi planeetan liike-energia on etupäässä etenemisen liike-energiaa. Samoin planeettojen keskinäiset gravitaatiovuorovaikutukset ovat melko pieniä verrattuna vuorovaikutukseen Auringon kanssa. Siksi planeetan potentiaalienergiaa voidaan tarkastella planeetan potentiaalienergiana Auringon gravitaatiokentässä.

Kertaa Fysiikka 4 s. 101 ja 109.

Maan gravitaatiokenttä ei ole homogeeninen. Kun tarkastellaan pientä aluetta lähellä maanpintaa, Maan gravitaatiokenttää voidaan pitää homogeenisena. Tällöin gravitaatiokentän voimakkuus g_r on vakio. Kun kappaleen siirtymä gravitaatiokentässä on suuri, kappaleen potentiaalienergiaa määritettäessä on otettava huomioon gravitaatiokentän voimakkuuden g_r muuttuminen.



Kun kappale siirretään gravitaatiokentässä etäisyydeltä r_1 etäisyydelle r_2, kappaleen siirtämiseen tehdyn työn suuruus saadaan fysikaalisena pinta-alana.

On sovittu, että äärettömän kaukana Auringon gravitaatiokentässä olevan kappaleen potentiaalienergia on nolla. Taivaankappaleen potentiaalienergia etäisyydellä r Auringosta saadaan määrittämällä työ, joka olisi tehtävä, jos taivaankappale siirrettäisiin tältä etäisyydeltä äärettömän kauas Auringosta. Gravitaation tekemä työ on negatiivinen, koska voima ja siirtymä ovat vastakkaissuuntaiset.

Gravitaation potentiaalienergia
Kappaleen (massa m) potentiaalienergia gravitaatiokentässä etäisyydellä r gravitaatiokentän aiheuttajasta (massa M) on

$$E_\mathrm{p} = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Gravitaatiokentässä kappaleen mekaaninen energia säilyy.

Mekaaninen energia gravitaatiokentässä
Gravitaatiokentässä liikkuvan kappaleen mekaaninen energia säilyy

$$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \text{vakio} \quad \text{eli} \quad \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\gamma \frac{mM}{r}\right) = \text{vakio}.$$

Esimerkki 6

Meteoriitti on Maan pinnalle pudonnut Aurinkokunnan pienkappale, jonka läpimitta on alle sata metriä.

Meteoriitti lähestyy Maata. Kun meteoriitti on etäisyydellä $12R$ maapallon keskipisteestä, sen nopeus Maan suhteen on 8,5 km/s. Kuinka suurella nopeudella meteoriitti syöksyy Maan ilmakehään (noin 100 km:n korkeudelle maanpinnasta)? Maapallon säde on $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m. [S2001, 14]

$r_1 = 12R, \quad R = 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}, \quad M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg},$
$r_2 = (6{,}4 + 0{,}1) \cdot 10^6\ \text{m} = 6{,}5 \cdot 10^6\ \text{m},$
$v_1 = 8{,}5\ \text{km/s}, \quad \gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$

Meteoriitin mekaanisen energian voidaan olettaa säilyvän ilmakehän yläpuolella. Maan gravitaatiokentässä meteoriitin liike-energia on $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$ ja potentiaalienergia $E_\text{p} = -\gamma\frac{mM}{r}$, joissa m on meteoriitin massa ja v nopeus, M Maan massa, r meteoriitin etäisyys Maan keskipisteestä ja γ gravitaatiovakio. Mekaanisen energian säilymislain mukaan on

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\gamma\frac{mM}{r_1}\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 + \left(-\gamma\frac{mM}{r_2}\right).$$

Ratkaistaan yhtälöstä meteoriitin nopeus v_2:

$$v_1^2 - 2\gamma\frac{M}{r_1} = v_2^2 - 2\gamma\frac{M}{r_2}$$

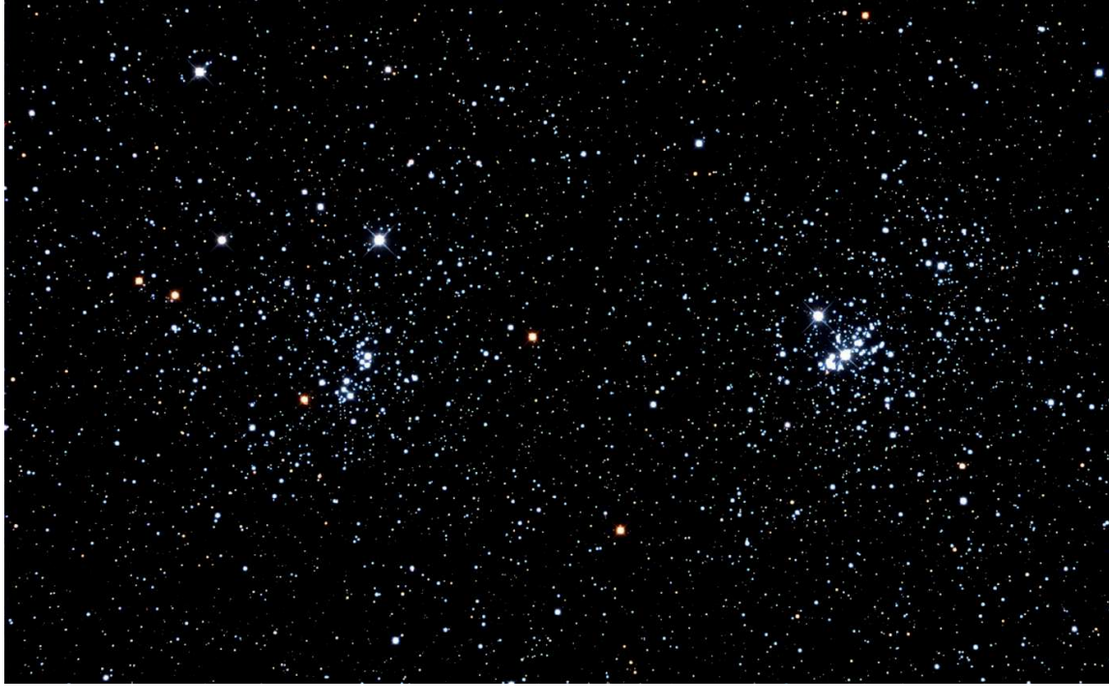
$$v_2^2 = v_1^2 - 2\gamma\frac{M}{r_1} + 2\gamma\frac{M}{r_2} = v_1^2 - 2\gamma M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2\gamma M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

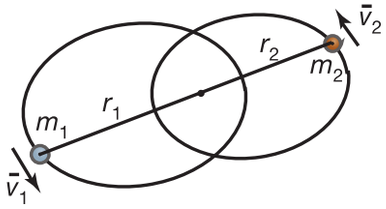
$$= \sqrt{\left(8500\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2\cdot 6{,}67259\cdot 10^{-11}\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}974\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{12\cdot 6{,}4\cdot 10^6\ \text{m}} - \frac{1}{6{,}5\cdot 10^6\ \text{m}}\right)}$$

$$\approx 14\ \text{km/s}.$$

Meteoriitti syöksyy Maan ilmakehään nopeudella 14 km/s.

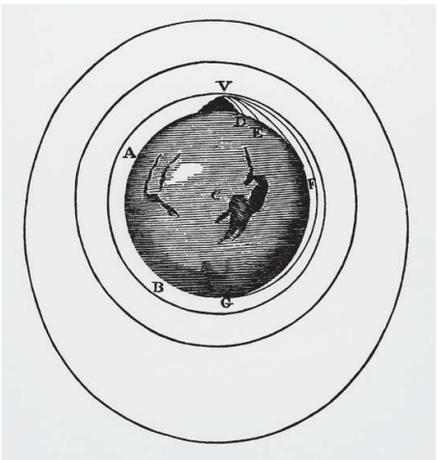


Kaksoistähtijoukot NGC 869 ja 884 Perseuksen tähdistössä.



Kaksi lähekkäistä taivaankappaletta, kuten kaksoistähdet, kiertävät niiden yhteisen massakeskipisteen ympäri. Systeemin massakeskipiste sijaitsee tähtien massakeskipisteiden yhdysjanalla. Kaksoistähtijärjestelmän tähtien ratojen säteet r_1 ja r_2 ovat käänteen verrannolliset tähtien massoihin m_1 ja m_2, eli $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$. Kaksoistähtiä tutkimalla saadaan tietoa esimerkiksi tähtien massoista; yksittäistä tähteä tutkimalla tätä tietoa ei saataisi.

Maan ja Kuun massojen suhde on 81,6 ja keskipisteiden välinen etäisyys 384 400 km. Yhteinen massakeskipiste sijaitsee Maan sisällä, noin 4710 km:n etäisyydellä Maan keskipisteestä. Maan säde on 6378 km. Maa–Kuu-systeemiä sanotaan joskus kaksoisplaneettajärjestelmäksi.



Pakonopeudet

Newton päätteli, että jos Maan pinnalta olevalta korkealta vuorelta ammutaan kappale sopivalla, riittävän suurella vaakasuoralla nopeudella, kappale putoaa joka hetki Maata kohti sen verran kuin Maan pinta kaartuu sen alta pois. Tällöin kappale joutuu Maata kiertävälle radalle.

Esimerkki 7

Laske ensimmäinen pakonopeus eli nopeus, joka kappaleelle, kuten avaruusalukselle, on annettava, jotta se pääsisi ja jäisi Maata kiertävälle radalle.

$\gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}, \quad M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg},$
$r = 6378\ \mathrm{km}$

Kun kappaleelle on annettu riittävän suuri Maan pinnan suuntainen nopeus, Maan pinta kaartuu kappaleen alla yhtä paljon kuin kappale putoaa. Kappale on joutunut Maata kiertävälle radalle. Kappaleen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Kun suunta kohti Maan keskipistettä on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $\gamma \dfrac{mM}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$, jossa M on Maan massa, m kappaleen massa, v ratanopeus ja r etäisyys Maan keskipisteestä. Yhtälöstä saadaan ensimmäiseksi pakonopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6378\ \mathrm{km}}}$$
$$\approx 7{,}9\ \mathrm{km/s}.$$

Jos ilmanvastus huomioidaan, tarvittava lähtönopeus on suurempi.

Toinen pakonopeus on nopeus, jolla satelliitti tai avaruusalus vapautuu kokonaan taivaankappaleen, kuten Maan, vetovoimakentästä mutta jää Aurinkoa kiertävälle radalle. Satelliitti pääsee poistumaan Maan vaikutuspiiristä, jos sen nopeus on 11,2 km/s.

Kolmas pakonopeus 42,2 km/s on nopeus, jonka kappale (avaruusalus) tarvitsee vapautuakseen Aurinkokunnan vetovoimakentästä. Kappale jää kiertämään Linnunradan keskustaa.

Satelliitit voidaan viedä Maata kiertävälle radalle kantorakettien avulla. Kun raketit lähtevät läheltä päiväntasaajaa Maan pyörimisen suuntaan, Maan pyörimisestä saatu nopeushyöty on suuri, noin 460 m/s.

Pohdi ja etsi

5-1. Käsite eksentrisyys kuvaa planeetan kiertoradan soikeutta. Mitä suurempi radan eksentrisyys on, sitä enemmän rata poikkeaa ympyräradasta. Ympyrän eksentrisyys on nolla. Etsi Maan ja Marsin ratojen eksentrisyydet. Kumman planeetan rata on lähempänä ympyrärataa?

5-2. a) Näytä kädellä Maan pyörimissuunta.
b) Näytä suunta, jossa Aurinko on puolenpäivän aikaan.

5-3. a) Esitä putoamiskiihtyvyys Maan pinnalla leveyspiirin funktiona. Käytä apuna taulukkokirjaa.
b) Olet lähdössä Bangkokiin lomalle. Päättele kuvaajasta putoamiskiihtyvyyden suuruus Bangkokissa.

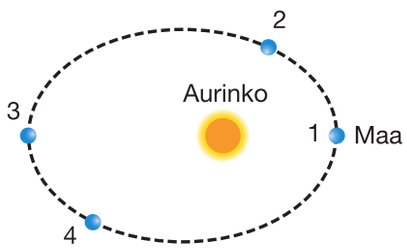
5-4. Selvitä lyhyesti.
a) Miten tähdet ja planeetat syntyvät suuresta pöly- ja kaasupilvestä?
b) Auringon pinnalla putoamiskiihtyvyys on suuri. Miksi Aurinko ei kutistu, vaikka se on kaasua?
c) Mistä vuodenajat johtuvat?
d) Mistä Kuun vaiheet aiheutuvat?

5-5. a) Miten vuorovesi-ilmiötä käytetään energiantuotannossa? Miksi vesi nousee ja laskee samassa paikassa kaksi kertaa vuorokaudessa?
b) Onko Kuun painopiste samassa kohdassa kuin sen keskipiste?
c) Miten Maata kohti kulkeva meteoriitti kokee Maan gravitaatiovoiman?

5-6. Ota selvää, mikä on Foucaultin heiluri ja mitä sen avulla voidaan osoittaa.

5-7. Selvitä, mitä satelliitteihin liittyen tarkoittavat LEO-, GEO- ja GTO- radat.

5-8. Piirroksessa Maa kiertää Aurinkoa ellipsirataa pitkin. Piirroksen mittasuhteet ovat liioitellut.
a) Missä kohdista 1, 2, 3 ja 4 Maan ratanopeus on suurin ja missä pienin?
b) Missä kohdista 1, 2, 3 ja 4 Maan tangenttikiihtyvyys on nolla?
c) Merkitse vektoreina kohtiin 1, 2, 3 ja 4 Maan ratanopeus, normaalikiihtyvyys, tangenttikiihtyvyys ja (kokonais)kiihtyvyys.



Tehtäviä

5-9. Suomalaiset tutkijat ovat löytäneet useita Aurinkoa kiertäviä pikkuplaneettoja eli asteroideja. Löytäjä saa antaa löytämälleen asteroidille nimen. Oheisessa taulukossa on muutamien asteroidien tietoja. Keplerin lakeja voidaan soveltaa myös asteroideihin.
a) Selvitä asteroidien keskietäisyyksien avulla, missä asteroidien radat sijaitsevat.
b) Laske Juhani-asteroidin ratanopeus. Asteroidien ratanopeutta voidaan pitää likimain vakiona ja ratoja ympyröinä.
c) Vertaa Sibelius- ja Helsinki-asteroideja. Noudattavatko asteroidit Keplerin III lakia?

Asteroideja / Numero, nimi ja	Läpimitta / km	Keskietäisyys Auringosta / AU	Kiertoaika / a
1405, Sibelius	16	2,25	3,37
1495, Helsinki	20	2,64	4,29
2397, Lappajärvi	28	3,08	5,41
2487, Juhani	10	2,40	3,72

Lähde: Tähtitieteellinen yhdistys Ursa ja Heikki Oja. Taulukon tiedot perustuvat pikkuplaneettakeskuksen (IAU Minor Planet Center) tietoihin.

5-10. Galileo Galilei löysi kaukoputkensa avulla neljä Jupiterin kuuta. Io kiertää Jupiterin 1,8 vuorokaudessa, ja sen etäisyys Jupiterista on noin $4 \cdot 10^8$ m. Laske Ganymedes-kuun kiertoaika. Sen etäisyys Jupiterista on noin $11 \cdot 10^8$ m.

5-11. Uranuksen sideerinen kiertoaika Auringon ympäri on 84,04 a ja Jupiterin 11,863 a. Jupiterin keskietäisyys Auringosta on $778{,}4 \cdot 10^6$ km. Laske Uranuksen keskietäisyys Auringosta.

5-12. Laske gravitaatiovoima, jolla a) Kuu b) Aurinko vaikuttaa sinuun. Vertaa voimia toisiinsa.

5-13. a) Laske gravitaatiokentän voimakkuus 6380 km:n etäisyydellä Maan keskipisteestä.
b) Laske gravitaatiokentän voimakkuus Mount Kenyan huipulla (5199 m).
c) Laske gravitaatiokentän voimakkuus 15 000 km:n korkeudella Maan pinnasta.
d) Miten gravitaatiokentän voimakkuus muuttuu, kun etäisyys Maasta kasvaa?

5-14. a) Laske Maan normaalikiihtyvyys kiertoradallaan.
b) Kuu tekee yhden kierroksen Maan ympäri 27,3 vuorokaudessa. Laske Kuun normaalikiihtyvyys Maata kohti.
Oleta, että Maan ja Kuun radat ovat ympyröitä.

5-15. Määritä Auringon massa olettaen, että Maa kiertää Aurinkoa ympyrärataa pitkin.

5-16. Määritä Kuun a) ratanopeus b) kiertoaika Maan ympäri. Oletetaan Kuun kiertävän Maata ympyrärataa pitkin.

5-17. Avaruusteleskooppi Hubble kiertää Maata 590 km:n korkeudella. Laske Hubblen kiertoaika ja kiihtyvyys. Minkä vuoksi teleskooppi kannattaa sijoittaa avaruuteen? [S1998, 7]

5-18. Geostationäärinen satelliitti pysyy Maan pinnalta katsottaessa paikallaan.
a) Millä leveyspiirillä geostationäärinen satelliitti voi sijaita?
b) Laske geostationäärisen satelliitin radan korkeus.

5-19. Pieni satelliitti kiertää planeettaa ympyräradalla, jonka säde on 9370 km. Satelliitin kiertoaika on 7 h 39 min. Laske planeetan massa.

5-20. Neutronitähden massa on $2{,}8 \cdot 10^{30}$ kg ja halkaisija 24 km.
a) Kuinka suuri on gravitaation aiheuttama putoamiskiihtyvyys tähden pinnalla?
b) Mikä on pyörimisliikkeen jaksonaika, kun ekvaattorilla olevaan kappaleeseen vaikuttava tukivoima on nolla (kappale on näennäisesti painottomassa tilassa)?

5-21. Marsin pinnalle onnistuttiin ensimmäisen kerran saamaan tutkimuslaitteisto vuonna 1976 Viking 1 -luotaimen mukana. Viking 1 kiersi Marsia soikealla radalla, jonka ylin piste oli 32 600 km:n korkeudella planeetan pinnasta ja alin piste vain 1500 km:n korkeudella. Oletetaan, että radan alimmassa pisteessä luotaimesta lähetetään Marsiin tutkimusmoduuli siten, että moduuli ammutaan suoraan taaksepäin luotaimen nopeuden suuruisella nopeudella (luotaimen suhteen).
a) Millaista on moduulin liike laukaisun jälkeen?
b) Laske moduulin alkukiihtyvyys.
[K1997, 7]

5-22. Kuun etäisyys Maasta on noin 384 000 km. Missä pisteessä Maan ja Kuun välissä kummankin vetovoimat ovat yhtä suuret? Maan massa on $5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg ja Kuun massa $7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg.

5-23. Osoita yksikkötarkastelua käyttäen, että yhtälöstä $v = \sqrt{\dfrac{\gamma m}{2R}}$ nopeuden yksiköksi tulee 1 m/s.

Mars Pathfinder -avaruusluotain laskeutui Marsiin 1997 mukanaan planeettakulkija Sojourner (kuvassa). Ennen Pathfinderia Marsiin olivat laskeutuneet onnistuneesti vain Viking 1 ja Viking 2 -luotainten laskeutujat. Pathfinder lähetti maahan noin 16 000 kuvaa ja Sojourner 550. Pathfinder lähetti kaikkiaan yli kahdeksan miljoonaa säämittausta Marsissa vallitsevasta paineesta ja lämpötilasta. Merkittävimmät Pathfinderin havainnot koskivat veden esiintymistä. Pathfinder ja Sojournerin tutkivat Marsia kolme kuukautta.

Testaa, osaatko

Oikeita vastausvaihtoehtoja voi olla yksi tai useampia.

1. Keplerin lakien perusteella
a) planeettojen radat ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä on Aurinko
b) planeettojen radat ovat ympyräratoja, joiden keskipisteessä on Aurinko
c) kaukana Auringosta ollessaan planeetta kulkee hitaammin ja lähellä Aurinkoa ollessaan nopeammin.

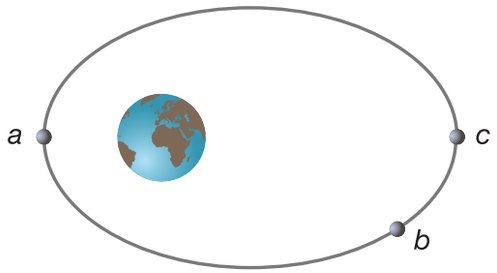
2. Gravitaatiovoiman suuruus riippuu
a) vuorovaikutuksessa olevien kappaleiden massoista
b) vuorovaikutuksessa olevien kappaleiden etäisyydestä
c) gravitaatiovakion suuruudesta.

3. Maan gravitaatiokentän voimakkuus riippuu
a) kentässä olevan kappaleen massasta
b) etäisyydestä Maan keskipisteestä
c) Maan säteestä.

4. Putoamiskiihtyvyys
a) pienenee nopeasti, kun etäisyys Maan pinnalta kasvaa
b) vaihtelee Maan pinnalla
c) on laskuissa $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

5. Planeettojen
a) pyörimisenergiat ovat pieniä verrattuna muihin mekaanisen energian lajeihin
b) liike-energia on etupäässä etenemisen liike-energiaa
c) keskinäiset gravitaatiovuorovaikutukset ovat melko pieniä verrattuna vuorovaikutukseen Auringon kanssa.

6. Satelliitti kiertää Maata elliptisellä radalla. Missä merkityissä radan pisteissä satelliittiin vaikuttava gravitaatiovoima on suurin?
a *b* *c*



7. Missä pisteessä satelliitin normaalikiihtyvyys on suurin?
a *b* *c*

8. Missä pisteessä satelliitin ratanopeus on suurin?
a *b* *c*

9. Satelliitti kiertää maata 600 km:n korkeudella. Tällöin satelliitin kiertoaika Maan ympäri on noin
a) 10 min b) 100 min c) 1000 min.

10. Avaruusalus saa maanpinnalta lähtiessään nopeuden 8,2 km/s. Tällöin avaruusalus
a) jää kiertämään Maata
b) poistuu Maan vaikutuspiiristä
c) poistuu Aurinkokunnasta.

Tiivistelmä

- Keplerin lait
  I laki: Planeettojen radat ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä on Aurinko.
  II laki: Planeetan liikkuessa sitä Aurinkoon yhdistävä jana pyyhkii yhtä pitkissä ajoissa yhtä suuret pinta-alat.
  III laki: Planeettojen kiertoaikojen T (Auringon ympäri) neliöt ovat verrannolliset niiden ja Auringon keskietäisyyksien r kuutioihin, eli $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$. Laki voidaan esittää myös muodossa $T^2 = kr^3$, jossa k on vakio.

- Newtonin gravitaatiolaki
  Kaksi pistemäistä kappaletta, joiden massat ovat m_1 ja m_2 ja joiden välinen etäisyys on r, vetävät toisiaan puoleensa voimalla, joka on suoraan verrannollinen kummankin kappaleen massaan ja kääntäen verrannollinen kappaleiden välisen etäisyyden neliöön:
  $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, jossa $\gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

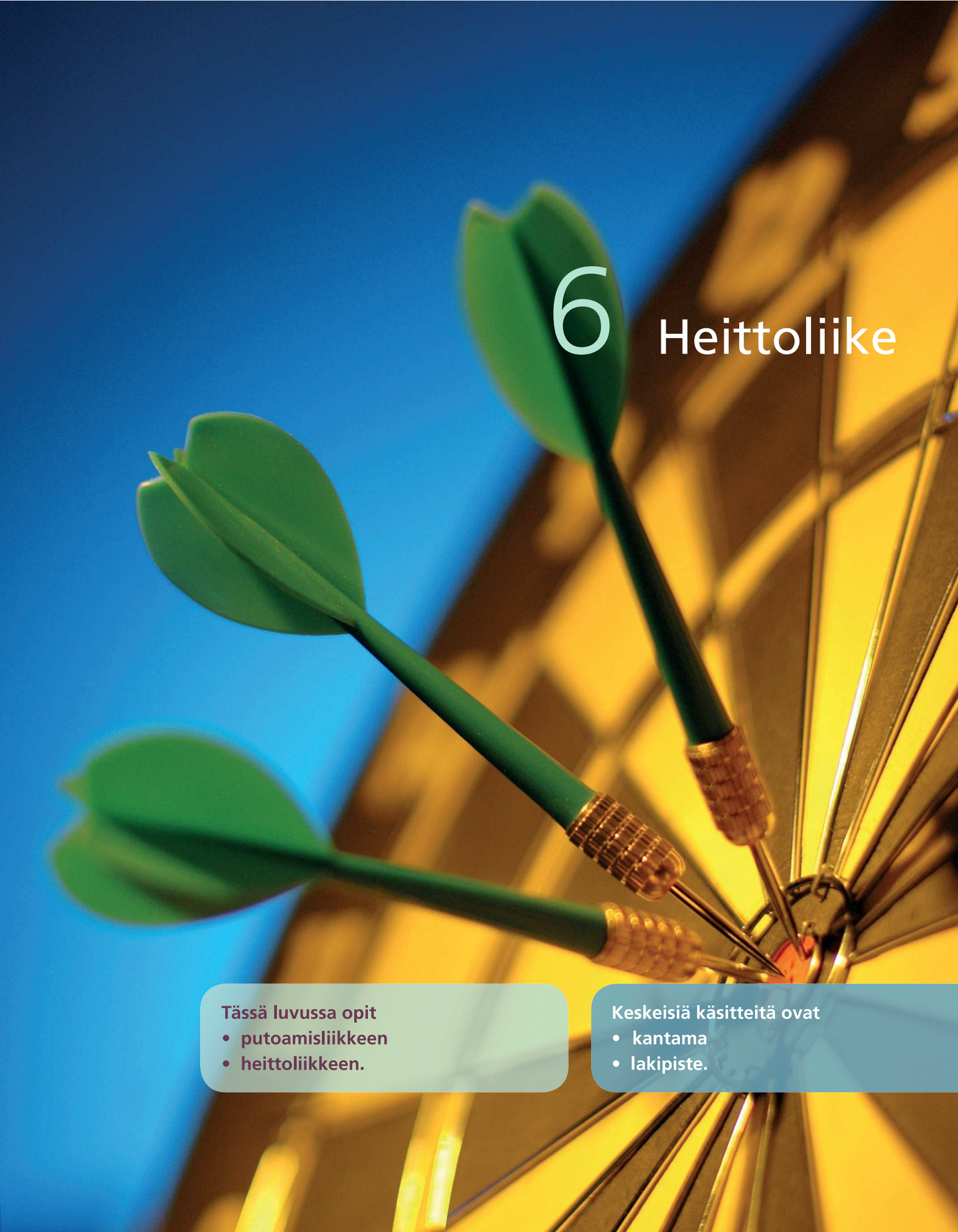
- Putoamiskiihtyvyys Maan pinnalla on $g = \gamma \frac{M}{R^2}$, jossa M on Maan massa, R Maan säde ja γ gravitaatiovakio. Putoamiskiihtyvyys etäisyydellä r Maan keskipisteestä ($r \geq R$) on $g_r = g\left(\frac{R}{r}\right)^2$.

- Kappaleeseen kohdistuva paino etäisyydellä r Maan keskipisteestä ($r \geq R$) on $G_r = mg\left(\frac{R}{r}\right)^2$.

- Maan gravitaatiokentän voimakkuus on sama kuin putoamiskiihtyvyyden suuruus etäisyydellä r Maan keskipisteestä.

- Gravitaation potentiaalienergia: kappaleen (massa m) potentiaalienergia gravitaatiokentässä etäisyydellä r gravitaatiokentän aiheuttajasta (massa M) on
  $E_\mathrm{p} = -\gamma \frac{mM}{r}$.

- Gravitaatiokentässä liikkuvan kappaleen mekaaninen energia säilyy.
  $E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \text{vakio eli } \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\gamma \frac{mM}{r}\right) = \text{ vakio.}$



6 Heittoliike

Tässä luvussa opit
- **putoamisliikkeen**
- **heittoliikkeen.**

Keskeisiä käsitteitä ovat
- **kantama**
- **lakipiste.**

Heittoliike

Meistä moni on heittänyt kesällä tikan kohti tikkataulua. Kun haluaa osua keskelle taulua, tikka on heitettävä vinosti hieman ylöspäin. Urheilukilpailuissa esimerkiksi kuulan ja keihään liike kaartuu, samoin pituushyppääjän liike. Myös suihkulähteiden vesisuihkut kaartuvat. Heittoliikkeeksi sanotaan lähellä maanpintaa, painovoiman vaikutuksesta tapahtuvaa liikettä.

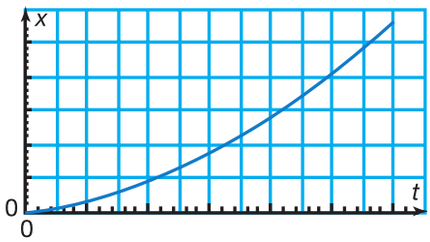
Tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhtälöitä voidaan pitää putoamisliikkeen ja pystysuoran heittoliikkeen malleina. Lähellä maanpintaa Maan gravitaatiokentän voimakkuutta voidaan pitää lähes vakiona: tällöin myös gravitaatiovuorovaikutuksesta aiheutuvaa putoamiskiihtyvyyttä g voidaan pitää vakiona.

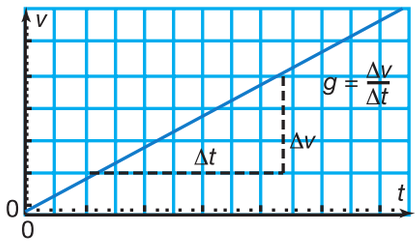
Jos heittoliikkeessä olevan kappaleen nopeus on pieni, kappaleeseen kohdistuva ilmanvastus on pieni. Kappaleen nopeuden kasvaessa myös ilmanvastus kasvaa. Heittoliikkeessä olevan kappaleen kantamaan vaikuttaa paitsi ilmanvastus myös kappaleen heittokulma. Heittokulman merkitys on suuri esimerkiksi keihäänheitossa.

6.1 Putoaminen ja pystysuora heittoliike

Putoaminen

Oppilastyö ▪ Putoaminen
Tutki tietokoneeseen kytketyn tutkan avulla pallon putoamista (t, x)- ja (t, v)-koordinaatiston kuvaajista.





Tietokoneen (t, x)-koordinaatistoon piirtämästä kuvaajasta nähdään, että yhtä pitkillä aikaväleillä putoavan pallon paikan muutos kasvaa. Pallo on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, koska (t, v)-koordinaatiston kuvaaja on suora. Pallon putoamiskiihtyvyys saadaan (t, v)-koordinaatistoon piirretyn suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta: $g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Liikkeen lait -kurssilla johdetut tasaisesti kiihtyvää liikettä kuvaavat yhtälöt $v = v_0 + at$ ja $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ soveltuvat heittoliikkeen ja putoamisliikkeen mallintamiseen. Putoamisliikkeessä putoavan kappaleen alkunopeus on $v_0 = 0$ m/s ja kappaleen paikan muutos Δx on yhtä suuri kuin putoamismatka y. Kun suunta alas on positiivinen, putoamisessa $a = g$. Laskuissa käytetään arvoa $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

Putoamisliike
Putoamisliikkeen mallintamisessa voidaan käyttää yhtälöitä

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{ja}$$
$$v = gt,$$

joissa kappaleen ajassa t putoama matka on y ja v on saavutettu nopeus. Putoamiskiihtyvyyden g aiheuttaa gravitaatiovoima. Suunta alas on positiivinen.

Kertaa väliaineen vastus Fysiikka 4 -kirjan sivulta 68.

Vapaasti putoava kappale on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jos kappaleeseen kohdistuva ilmanvastus on vähäinen. Ilmanvastusta voidaan pitää vaikutukseltaan vähäisenä, jos kappale on pieni ja raskas, kuten kivi, ja sen nopeus ei ole suuri.

Ilmanvastuksen merkitys kasvaa, kun kappaleen poikkipinta-ala ja putoamisnopeus kasvavat. Putoamisliike muuttuu tasaiseksi, kun putoavaan kappaleeseen kohdistuva ilmanvastus on kasvanut yhtä suureksi kuin kappaleeseen kohdistuva paino. Tällöin kappale jatkaa putoamistaan vakionopeudella.

Esimerkki 1

Kerrostalon räystäältä, 16 metrin korkeudelta, putoaa jääpuikko.
a) Kuinka pitkän ajan kuluttua jääpuikko osuu maahan?
b) Mikä on jääpuikon nopeus sen osuessa maahan?
Jääpuikkoon kohdistuvaa ilmanvastusta voidaan pitää vähäisenä.

$v_0 = 0\ \text{m/s}, \quad y = 16\ \text{m}, \quad g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

a) Valitaan koordinaatisto siten, että origo on räystään kohdalla. Sovitaan suunta alas positiiviseksi. Koska jääpuikko lähtee levosta, yhtälöstä $y = \frac{1}{2}gt^2$ saadaan putoamisajaksi

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}} = 1{,}80609\ \text{s} \approx 1{,}8\ \text{s}.$$

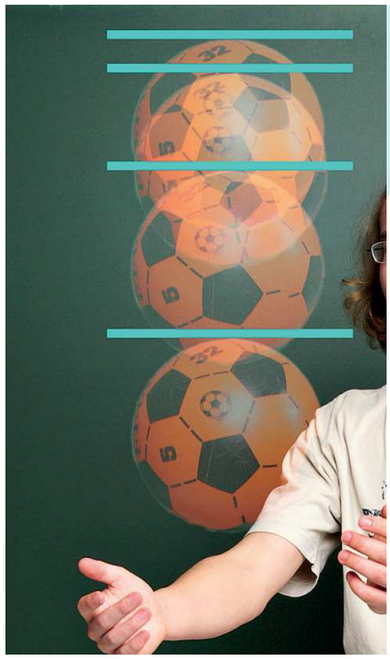
Jääpuikko osuu maahan 1,8 sekunnin kuluttua.

b) Jääpuikon nopeus sen osuessa maahan on

$$v = gt = 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}80609\ \text{s} \approx 18\ \text{m/s}.$$

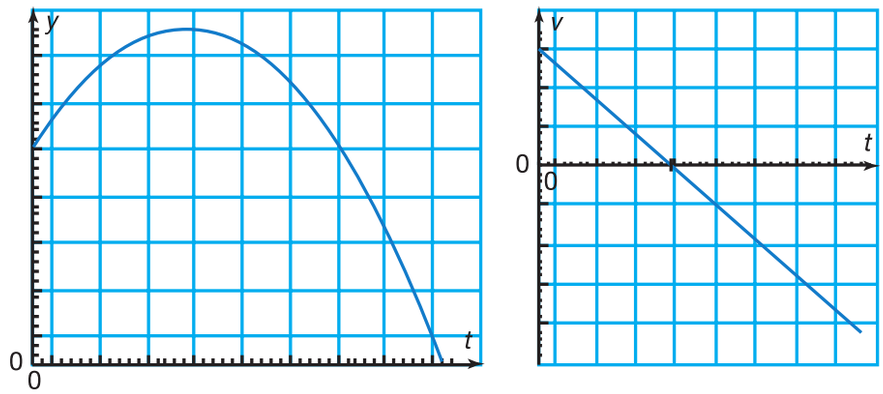
Jääpuikko törmää maahan nopeudella 18 m/s.

Pystysuora heittoliike



Oppilastyö ▪ Pystysuora heittoliike
Heitä pallo ylöspäin. Tutki pallon liikettä tietokoneeseen kytketyn tutkan avulla.

Kun pallo heitetään ylöspäin, siihen kohdistuvat kädestä irtoamisen jälkeen paino ja ilmanvastus. Kun pallo liikkuu ylöspäin, sen yhtä pitkinä aikaväleinä kulkema matka lyhenee. Pallo on hidastuvassa liikkeessä, ja pallon nopeus pienenee tasaisesti. Lakipisteessä (heiton suurin korkeus) pallon nopeus on hetkellisesti nolla, koska nopeuden suunta muuttuu ja pallo joutuu putoamisliikkeeseen. Jos pystysuorassa heittoliikkeessä kappaleen lähtö- ja putoamispaikka ovat samalla korkeudella, kappaleen nousuaika on yhtä suuri kuin putoamisaika.



Suoraan ylöspäin heitetyn pallon liikkeen kuvaajat (*t*, *y*)- ja (*t*, *v*)-koordinaatistoissa.

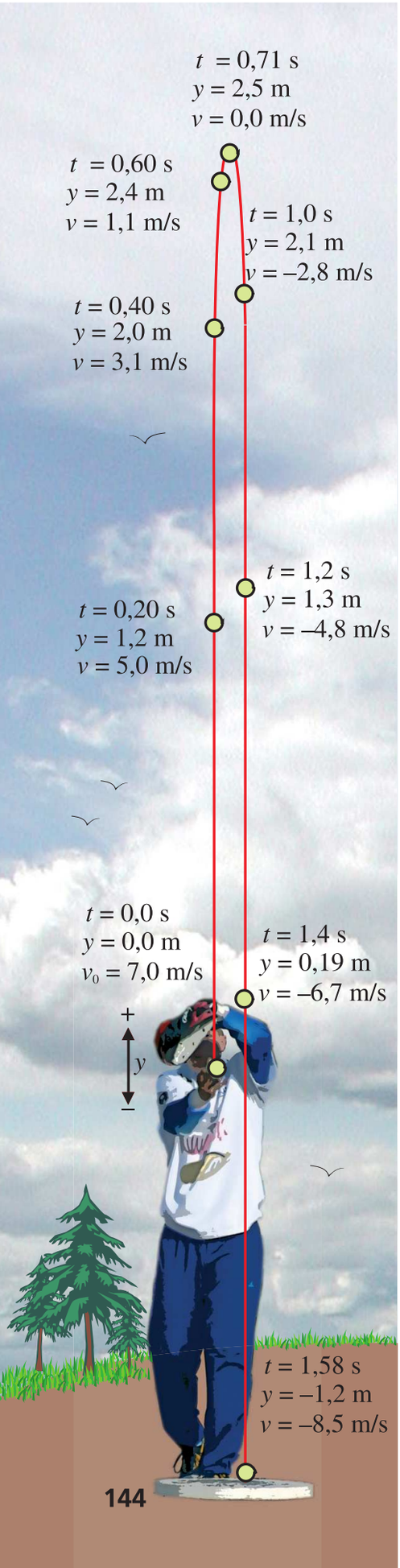
Pystysuora heittoliike
Pystysuorassa, ylös suuntautuvassa heittoliikkeessä kappaleen nopeutta v ja paikkaa y voidaan mallintaa yhtälöillä

$$v = v_0 - gt \quad \text{ja}$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Yhtälöissä v_0 on alkunopeus ja suunta ylös positiivinen. Yhtälöt kuvaavat liikettä sekä nousun että putoamisen aikana.

Esimerkki 2



Janne harjoittelee pesäpallossa tolppasyöttöjä. Syöttö irtoaa hänen kädestään 1,2 m:n korkeudella. Syötössä pallon alkunopeus on 7,0 m/s. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.

a) Laske pallon nousuaika ja lakikorkeus (nousukorkeus) maasta mitattuna.

b) Kuinka monen sekunnin kuluttua pallo putoaa maahan?

c) Laske pallon nopeus sen osuessa maahan.

d) Miten ilmanvastuksen huomioiminen vaikuttaisi vastauksiin?

$v_0 = 7{,}0\ \text{m/s}, \quad g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Asetetaan koordinaatiston origo kohtaan, jossa pallo irtoaa heittäjän kädestä. Sovitaan suunta ylös positiiviseksi.

a) Lakikorkeudella pallon nopeus on hetkellisesti nolla, koska pallon liikkeen suunta muuttuu. Yhtälöstä $v = v_0 - gt = 0$ saadaan pallon nousuaika:

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{7{,}0\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}71356\ \text{s} \approx 0{,}71\ \text{s}.$$

Kun pallon nousuaika sijoitetaan yhtälöön $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, pallon nousukorkeus on

$$\begin{aligned} y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= 7{,}0\ \text{m/s} \cdot 0{,}71356\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}71356\ \text{s})^2 \\ &\approx 2{,}49745\ \text{m}. \end{aligned}$$

Pallon lakikorkeus maasta mitattuna on

$$1{,}2\ \text{m} + 2{,}49745\ \text{m} \approx 3{,}7\ \text{m}.$$

Pallon nousuaika on 0,71 s ja lakikorkeus 3,7 m.

b) Koska koordinaatiston origo on Jannen käden korkeudella, pallon osuessa maahan sen paikan y-koordinaatti on $y = -1{,}2$ m.

Kirjoitetaan paikkaa kuvaava yhtälö $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ muotoon $\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + y = 0$. Ratkaistaan yhtälö käyttäen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$t = \frac{-(-v_0) \pm \sqrt{(-v_0)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot y}}{2 \cdot \frac{1}{2} g} = \frac{v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 - 2gy}}{g}$$

$$= \frac{7{,}0 \text{ m/s} \pm \sqrt{(7{,}0 \text{ m/s})^2 - 2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (-1{,}2 \text{ m})}}{9{,}81 \text{ m/s}^2},$$

josta $t_1 = 1{,}58178$ s $\approx 1{,}6$ s ja $t_2 \approx -0{,}15$ s. Hylätään ajan negatiivinen arvo.

Pallo putoaa maahan 1,6 sekunnin kuluttua.

c) Kun pesäpallo osuu maahan, sen nopeus on

$$v = v_0 - gt = 7{,}0 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}58178 \text{ s} \approx -8{,}5 \text{ m/s}.$$

Koska pallon nopeus on negatiivinen, pallo on tulossa alaspäin. Pallon nopeus on $-8{,}5$ m/s.

d) Ilmanvastuksen takia nousukorkeus ja nopeus ovat saatuja tuloksia pienempiä.

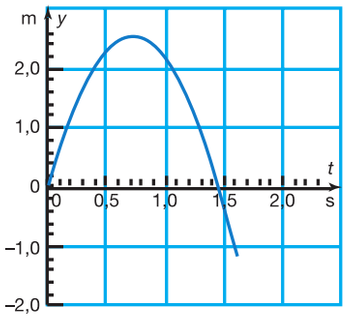
Tehtäviä

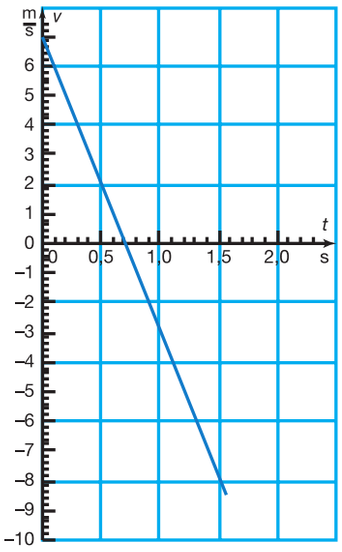
6-1. Sanna haluaa testata Juhon reaktioajan. Sanna pitää viivainta pystyssä siten, että sen alaosassa oleva nollakohta on Juhon etusormen ja peukalon välissä. Kun Sanna irrottaa otteensa, Juho saa viivaimen kiinni, kun se on pudonnut 31 cm. Laske Juhon reaktioaika.

6-2. Kivi pudotetaan kallion reunalta 45 m alempana olevaan järveen.
a) Piirrä kuva, josta ilmenevät putoavaan kiveen vaikuttavat voimat.
b) Milloin kivi osuu järvenpintaan?
c) Kuinka kauan pudotuksen jälkeen kestää, että kiven pudottaja kuulee molskahduksen? Ilmanvastusta ei oteta huomioon.

6-3. Autojen turvallisuustutkimuksissa suoritetaan pudotuskokeita. Kuinka korkealta auto olisi pudotettava, jotta se saisi nopeuden 92 km/h?

6-4. Kuvissa on esitetty pienen kuulan pystysuora heittoliike (t, y)- ja (t, v)-koordinaatistossa. Origo on sijoitettu kuulan lähtöpisteeseen.
a) Kuinka korkealla kuula on hetkellä 0,40 s?
b) Missä kuula on hetkellä 1,5 s?
c) Millä hetkellä kuula on lakipisteessään?
d) Mikä on kuulan nopeus hetkellä 1,0 s?
e) Määritä kuulan putoamiskiihtyvyys.





6-5. Kuula ammutaan suoraan ylöspäin. Samanaikaisesti pieni kivi heitetään vaakasuoraan suuntaan pitkin kitkatonta pintaa nopeudella 7,0 m/s. Kuula käy 6,0 m:n korkeudella ja putoaa lähtöalustalleen. Kuinka pitkälle kivi etenee kuulan ilmalennon aikana? Kuulaan ja kiveen kohdistuva ilmanvastus on vähäinen.

6-6. Ilmassa putoavan kappaleen nopeus mitattiin jaksottimella, ja tulokset taulukoitiin:

t/s	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75
v/(m/s)	0,49	1,47	2,45	3,40	4,30	5,02	5,72	6,35

a) Piirrä kappaleen nopeuden kuvaaja $v = v(t)$.
b) Perustele kuvaajan muoto.
c) Määritä kappaleen keskikiihtyvyys aikavälillä 0,20 s … 0,70 s. [K2002, 1]

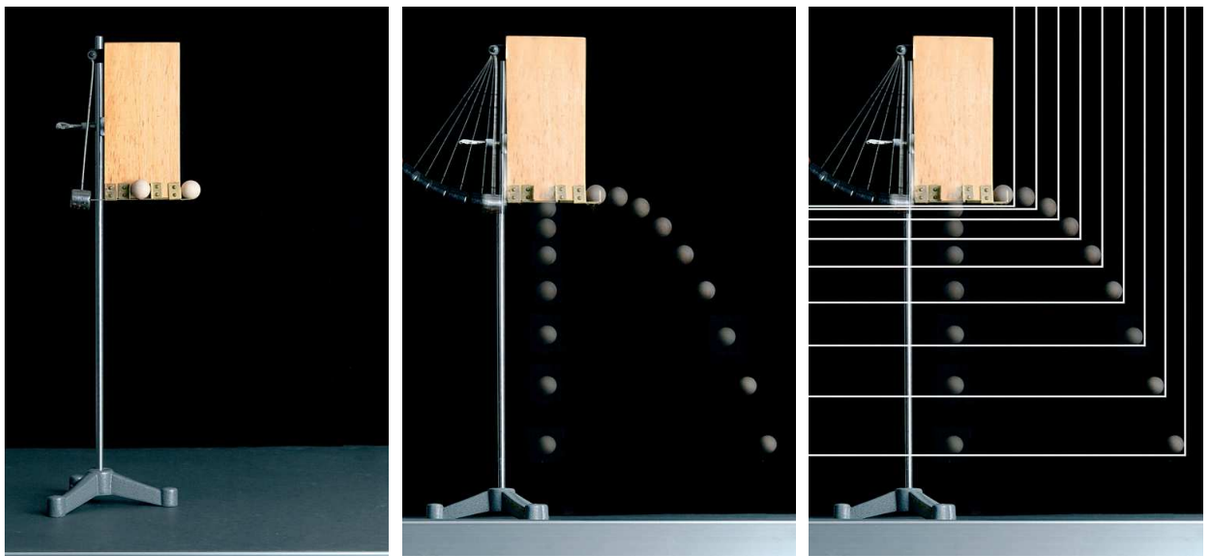
6-7. Pyöräilykypärän kestävyyttä eri törmäysnopeuksilla on tarkoitus testata pudottamalla sopivasti täytetty kypärä eri korkeuksilta.
a) Piirrä koetta varten kuvaaja, joka esittää levosta pudotetun kappaleen loppunopeutta pudotuskorkeuden funktiona.
b) Määritä kuvaajasta pudotuskorkeudet, jotka vastaavat törmäysnopeuksia 15 km/h ja 25 km/h.

6-8. Pallo heitetään suoraan alaspäin nopeudella 15 m/s. Pallo törmää maanpintaan, joka on 73 m heittopaikan alapuolella.
a) Milloin pallo osuu maahan?
b) Laske pallon nopeus sen törmätessä maahan.
c) Esitä pallon kulkema matka ja nopeus ajan funktiona.
d) Miten ilmanvastus vaikuttaisi tuloksiin, jos se otettaisiin huomioon?

6.2 Vaakasuora ja vino heittoliike

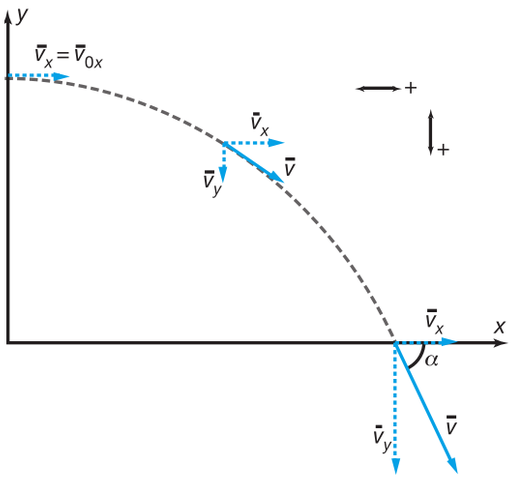
Vaakasuora heittoliike

Oppilastyö ▪ Vaakasuora heittoliike
Pudota kuvan mukaisen laitteiston avulla kaksi kuulaa. Aseta laitteisto vaakasuoraan vesivaa'an avulla. Moukari antaa toiselle kuulalle alkunopeuden vaakasuoraan suuntaan. Samanaikaisesti pohja siirtyy pois toisen kuulan alta. Kumpi kuulista osuu lattiaan ensin, vai osuvatko ne samanaikaisesti?



Kun kuulat putoavat, ne ovat aina samaan aikaan samalla korkeudella. Molempien kuulien liike pystysuunnassa on tasaisesti kiihtyvää; kuulat putoavat samalla putoamiskiihtyvyydellä. Vaakasuoran alkunopeuden saanut kuula etenee yhtä pitkinä aikaväleinä aina yhtä pitkän matkan, joten kuulan vaakasuora etenemisnopeus on vakio, koska ei ole kiihdyttäviä eikä jarruttavia voimia.

Kuulat osuvat vaakasuoraan lattiaan samalla hetkellä. Kuulien pudotessa niihin kohdistuu vain paino, kun ilmanvastus on vähäinen. Vaakasuunnassa vaikuttavia voimia ei ole.



Vaakasuorassa heittoliikkeessä olevan kappaleen liikettä voidaan tarkastella pystysuoran tasaisesti kiihtyvän liikkeen ja vaakasuoran tasaisen liikkeen yhdistelmänä.

Vaakasuora heittoliike

vaakasuora suunta liikkeen suunta positiivinen	pystysuora suunta suunta alas positiivinen
tasainen liike	tasaisesti kiihtyvä liike
kiihtyvyys a = nolla	kiihtyvyys a = vakio = g
nopeus v_x = vakio = v_{0x}	nopeus $v_y = gt$
paikka $x = v_{0x}t = v_x t$	paikka $y = \frac{1}{2}gt^2$

Vaakasuorassa heittoliikkeessä kappaleen nopeuden suuruus hetkellä t on $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$, jossa v_x ja v_y ovat nopeuden komponentit. Nopeuden suuntakulma α saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

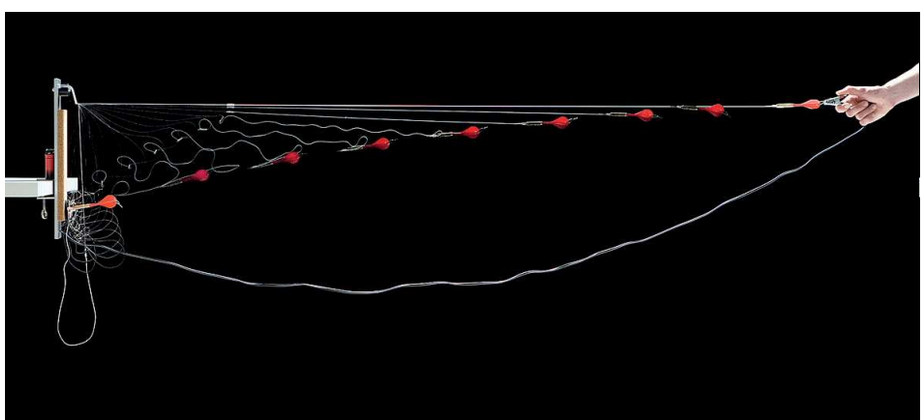
Vaakasuorassa heittoliikkeessä positiivinen suunta voidaan valita myös toisin kuin edellä taulukossa eli pystysuunnassa ylöspäin. Tällöin nopeuden pystysuora komponentti on $v_y = -gt$ ja paikka $y = -\frac{1}{2}gt^2$.

Esimerkki 3

Santtu heittää sillalta pienen kiven vaakasuuntaan, ja kivi putoaa alapuolella olevaan veteen. Kiven lähtönopeus on 8,5 m/s. Heitto lähtee 22 m:n korkeudelta vedenpinnan yläpuolelta.
a) Kuinka kauan kestää, että kivi osuu vedenpintaan?
b) Kuinka kauas vaakasuunnassa kivi lentää?
c) Laske kiven nopeus sen osuessa veteen.
Kiveen kohdistuva ilmanvastus on pieni.

$v_{0x} = 8{,}5$ m/s, $y = 22$ m, $g = 9{,}81$ m/s^2

Kun kuvan laitteessa tikka lähtee kuminauhan avulla liikkeelle vaakatasossa, samalla hetkellä maalitaulu alkaa pudota. Miksi tikka osuu maalitauluun?



a) Kivi on pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Kivellä ei ole alkunopeutta pystysuunnassa. Valitaan suunta alas positiiviseksi. Kiven putoamisaika saadaan yhtälöstä $y = \frac{1}{2} gt^2$. Putoamisaika on

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 22 \text{ m}}{9{,}81 \text{ m/s}^2}} = 2{,}11783 \text{ s} \approx 2{,}1 \text{ s}.$$

Kivi osuu vedenpintaan 2,1 s:n kuluttua.

b) Kiven nopeus vaakasuunnassa on vakio eli $v_{0x} = v_x = 8{,}5$ m/s, kun ilmanvastusta ei oteta huomioon. Kiven vaakasuunnassa kulkema matka on

$$x = v_x t = 8{,}5 \text{ m/s} \cdot 2{,}11783 \text{ s} \approx 18 \text{ m}.$$

Kivi lentää vaakasuunnassa 18 m.

c) Kun kivi osuu vedenpintaan, sen nopeuden vaakasuora komponentti on $v_x = 8{,}5$ m/s. Nopeuden pystysuora komponentti on

$$v_y = gt = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}11783 \text{ s} \approx 20{,}77591 \text{ m/s}.$$

Kiven nopeuden suuruus sen osuessa vedenpintaan on

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8{,}5 \text{ m/s})^2 + (20{,}77591 \text{ m/s})^2} \approx 22 \text{ m/s}.$$

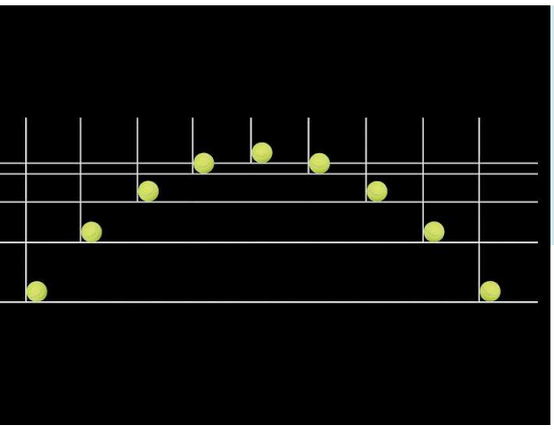
Nopeuden suunta vaakatasoon nähden saadaan yhtälöstä

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{20{,}77591 \text{ m/s}}{8{,}5 \text{ m/s}},$$

josta suuntakulma on $\alpha \approx 68°$.

Kiven nopeus on 22 m/s ja suunta vaakatasosta alas 68°.

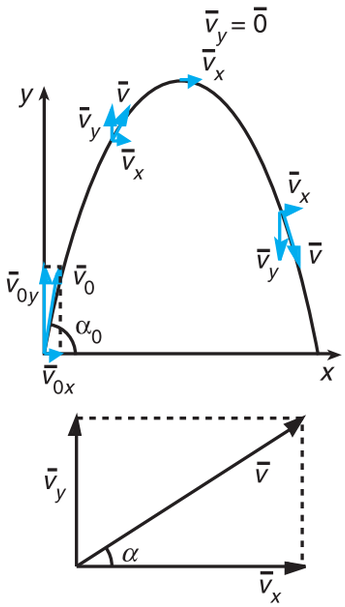
Vino heittoliike



Oppilastyö ▪ Vino heittoliike
Heitä pallo vinosti ylöspäin. Kuvaa pallon liikettä esimerkiksi videokameralla. Tutki pysäytyskuvien avulla kuva kerrallaan pallon liikettä vaaka- ja pystysuunnassa.

Vinoa heittoliikettä voidaan tarkastella käyttämällä tasaisen liikkeen ja tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhtälöitä. Kun ilmanvastus on pieni, vinosti ylöspäin heitetyn kappaleen nopeus vaakasuunnassa pysyy vakiona eli liike on tasaista liikettä. Pystysuunnassa kappaleen liike on tasaisesti hidastuvaa lakikorkeuden saavuttamiseen asti. Tämän jälkeen kappale putoaa alaspäin tasaisesti kiihtyen.

Olkoon vinoon heittoliikkeeseen joutuvan kappaleen lähtökulma α_0. Oletetaan kappaleen lähtevän liikkeelle hetkellä $t = 0$ s. Heittoliikkeessä olevan kappaleen nopeutta tarkastellaan nopeuden komponenttien avulla sekä x- että y-suunnassa.



$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$
$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt$

Viereisessä piirroksessa on vinossa heittoliikkeessä olevan kappaleen nopeusvektoreita komponentteihin jaettuna. Jos heittoliikkeen alkunopeus on v_0, alkunopeuden x-komponentti on $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$ ja y-komponentti $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$.

Koska liike on tasaista x-suunnassa, $v_x = v_{0x}$ on vakio. Liike on tasaisesti kiihtyvää y-suunnassa. Kun suunta ylös on positiivinen, nopeuden y-komponentti on $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha_0 - gt$. Jos lähtökulma on $\alpha_0 = \pm 90°$, kyseessä on liike pystysuunnassa. Vinossa heittoliikkeessä kappaleen nopeus $\bar{v}$ on komponenttien $\bar{v}_x$ ja $\bar{v}_y$ vektorisumma. Kappaleen nopeuden suuruus hetkellä t on $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$, jossa v_x ja v_y ovat nopeuden komponentit. Nopeuden suuntakulma α saadaan yhtälöstä $\tan \alpha = \dfrac{v_y}{v_x}$.

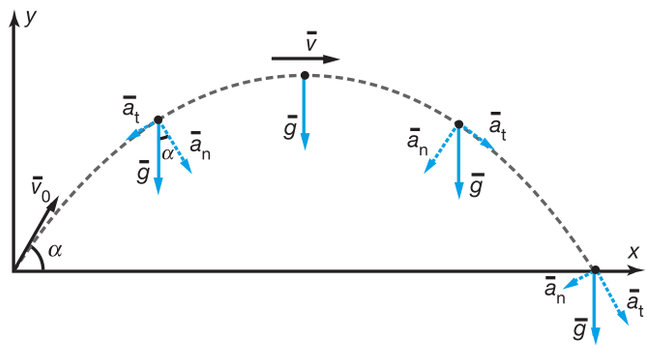
Vino heittoliike

vaakasuora suunta liikkeen suunta positiivinen	pystysuora suunta suunta ylös positiivinen
tasainen liike	tasaisesti kiihtyvä liike
kiihtyvyys a = nolla	kiihtyvyys a = vakio = $-g$
nopeus v_x = vakio = v_{0x}	nopeus $v_y = v_{0y} - gt$
paikka $x = v_{0x}t = v_x t$	paikka $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

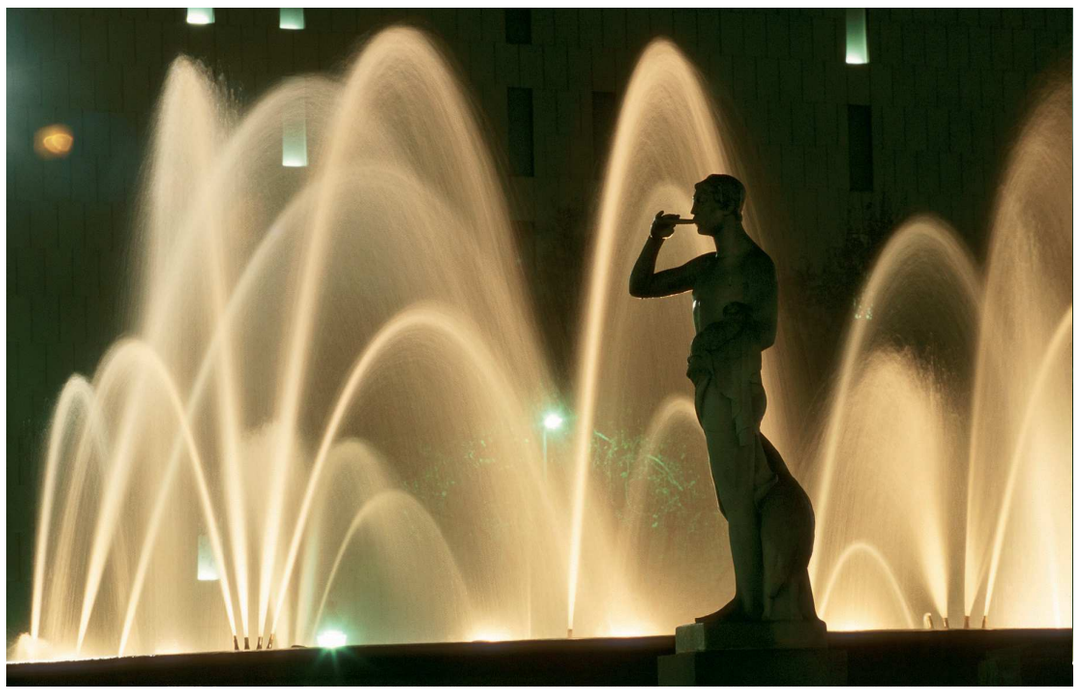
Vinossa heittoliikkeessä kappaleen nousuaika on puolet lentoajasta, mikäli kappaleeseen kohdistuva ilmanvastus on pieni ja lähtötaso on samalla korkeudella kun putoamistaso. Heittoliikkeen kantama saadaan sijoittamalla kappaleen lentoaika paikan x-koordinaatin yhtälöön ja lakikorkeus sijoittamalla nousuaika paikan y-koordinaatin yhtälöön.

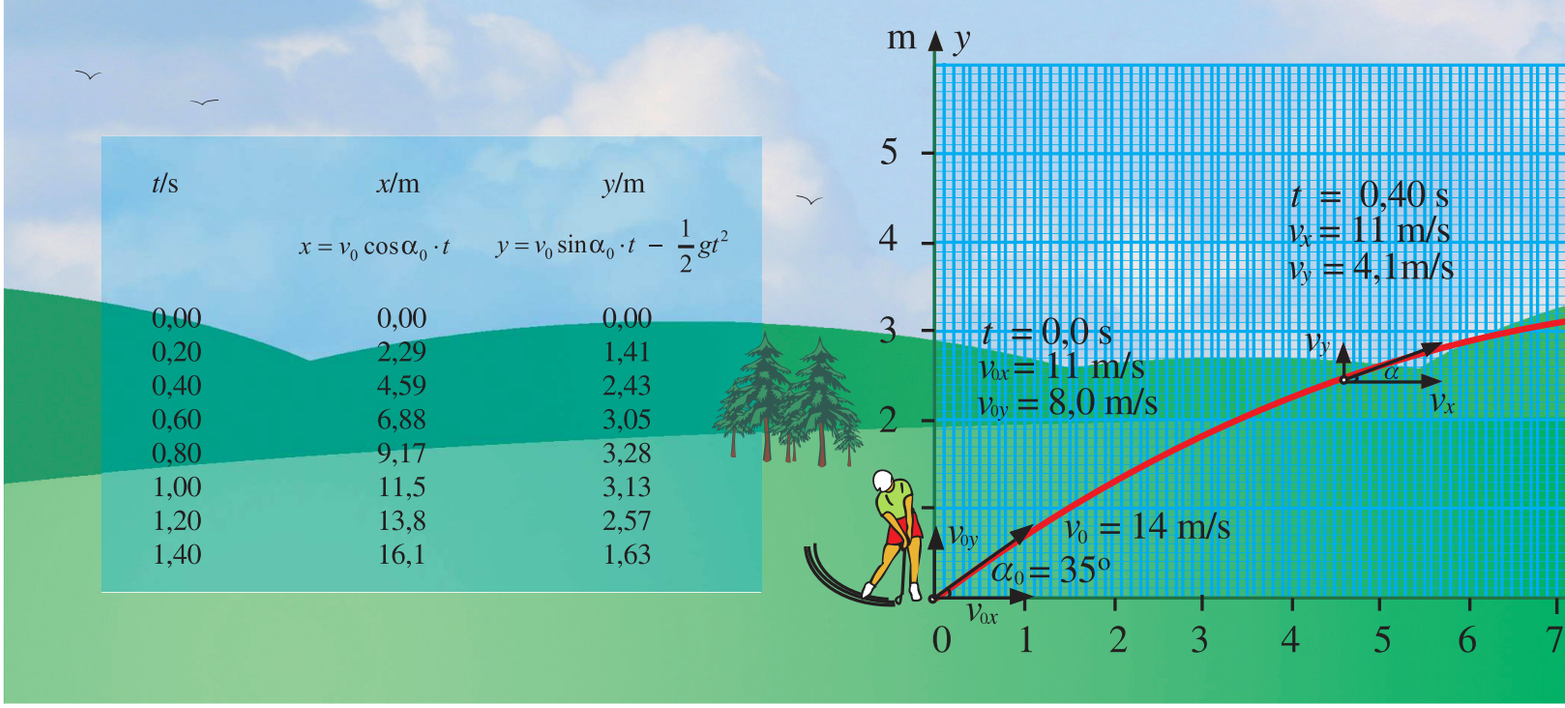
Heittoliikkeessä oleva kappale on kiihtyvässä ja käyräviivaisessa liikkeessä. Jos kappaleeseen kohdistuva ilmanvastus on pieni, kappaleeseen kohdistuu ainoastaan paino: kappaleen kiihtyvyys on $\overline{g}$. Kappaleen kiihtyvyys $\overline{g}$ voidaan jakaa nopeuden suuntaiseen $(\overline{a}_t)$ ja nopeutta vastaan kohtisuoraan komponenttiin $(\overline{a}_n)$.

Vinossa heittoliikkeessä olevan kappaleen paikkaa tarkastellaan usein (x, y)-koordinaatistossa, jossa origo sijoitetaan heittopisteeseen.



Vesisuihkun kantama riippuu vesisuihkun lähtönopeudesta ja lähtökulmasta sekä ilmanvastuksesta.





t/s	x/m	y/m
	$x = v_0 \cos\alpha_0 \cdot t$	$y = v_0 \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$
0,00	0,00	0,00
0,20	2,29	1,41
0,40	4,59	2,43
0,60	6,88	3,05
0,80	9,17	3,28
1,00	11,5	3,13
1,20	13,8	2,57
1,40	16,1	1,63

Esimerkki 4

Golfpallo lyödään nurmikolta alkunopeudella 14 m/s. Pallon lähtökulma on 35°. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.
a) Laske pallon nopeus 1,3 sekunnin kuluttua lyönnistä.
b) Milloin pallo putoaa lähtötason korkeudella olevalle vaakasuoralle viheriölle?
c) Missä kohdassa pallo osuu kenttään?
d) Kuinka korkealla pallo käy?

$v_0 = 14$ m/s, $\alpha_0 = 35°$, $g = 9{,}81$ m/s^2

a) Pallon nopeuden komponentit hetkellä $t = 1{,}3$ s ovat

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 = 14 \text{ m/s} \cdot \cos 35° \approx 11{,}46813 \text{ m/s} \quad \text{ja}$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt$$
$$= 14 \text{ m/s} \cdot \sin 35° - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}3 \text{ s} \approx -4{,}72293 \text{ m/s}.$$

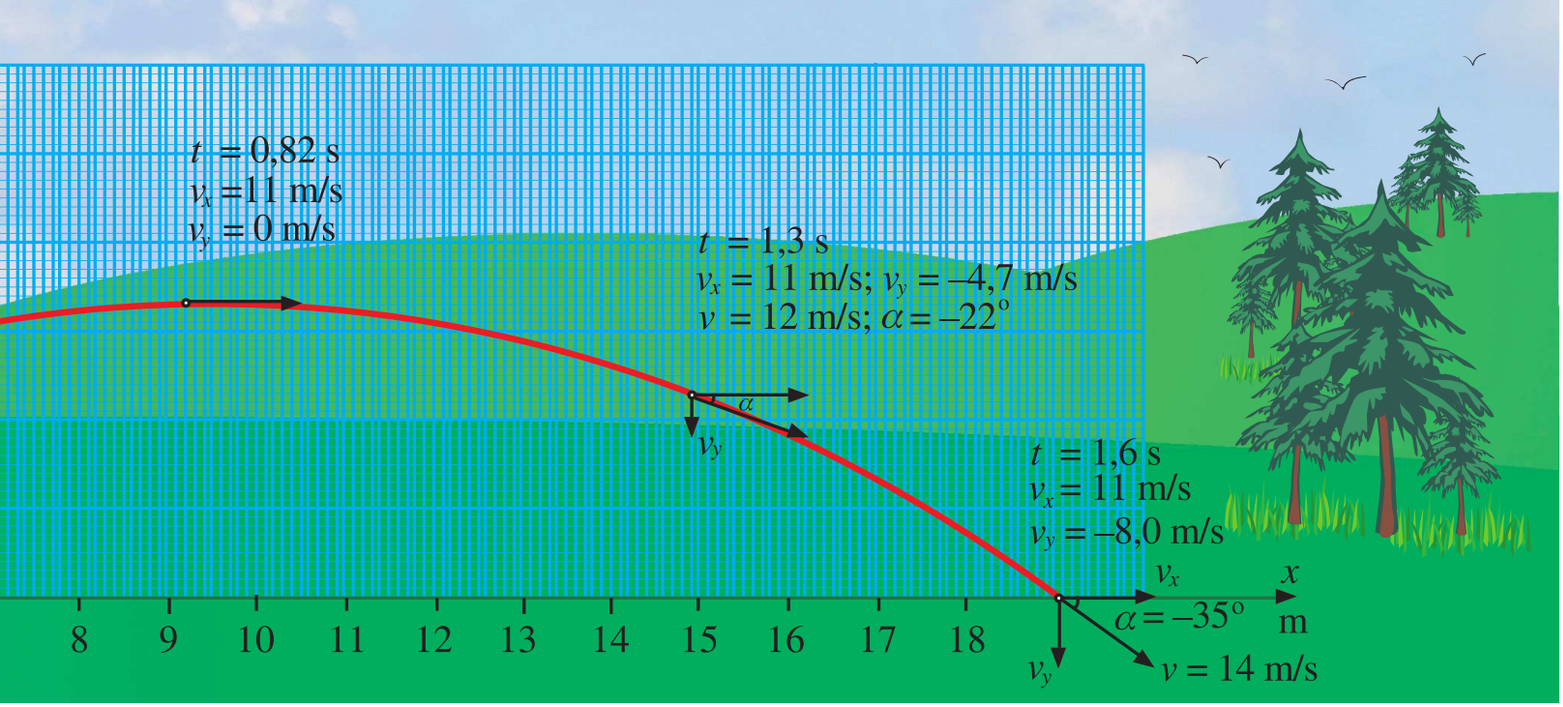
Pallon nopeuden suuruus on

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$
$$= \sqrt{(11{,}46813 \text{ m/s})^2 + (-4{,}72293 \text{ m/s})^2} \approx 12 \text{ m/s}.$$

Nopeuden suunta saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-4{,}72293 \text{ m/s}}{11{,}46813 \text{ m/s}}$, josta suuntakulma on $\alpha \approx -22°$.

Hetkellä $t = 1{,}3$ s golfpallon nopeus on 12 m/s ja nopeuden suunta on 22° vaakatasosta alas: pallo on siis putoamassa alaspäin.

b) Kun pallo osuu maahan, sen y-koordinaatti on $y = 0$ eli $v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$. Ratkaistaan yhtälöstä aika t:



$$v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt\right) = 0.$$

Ajaksi t saadaan $t_1 = 0$ s tai

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 14 \text{ m/s} \cdot \sin 35°}{9{,}81 \text{ m/s}^2} \approx 1{,}63712 \text{ s}.$$

Golfpallo putoaa lähtötason korkeudella olevalle vaakasuoralle viheriölle 1,6 sekunnin kuluttua.

c) Golfpallo osuu maahan etäisyydellä

$$x = v_x \cdot t = 11{,}46813 \text{ m/s} \cdot 1{,}63712 \text{ s} \approx 19 \text{ m}.$$

Pallo putoaa 19 m:n etäisyydelle lyöntikohdasta.

d) Lasketaan ensin pallon nousuaika. Lakikorkeudella pallon nopeus pystysuunnassa on nolla eli $v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt = 0$. Pallon nousuaika on

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} = \frac{14 \text{ m/s} \cdot \sin 35°}{9{,}81 \text{ m/s}^2} \approx 0{,}81856 \text{ s}.$$

Kun nousuaika sijoitetaan paikan y-koordinaatin yhtälöön, saadaan lakikorkeudeksi

$$y = v_0 \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 14 \text{ m/s} \cdot \sin 35° \cdot 0{,}81856 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (0{,}81856 \text{ s})^2 \approx 3{,}3 \text{ m}.$$

Pallo käy 3,3 m:n korkeudella.

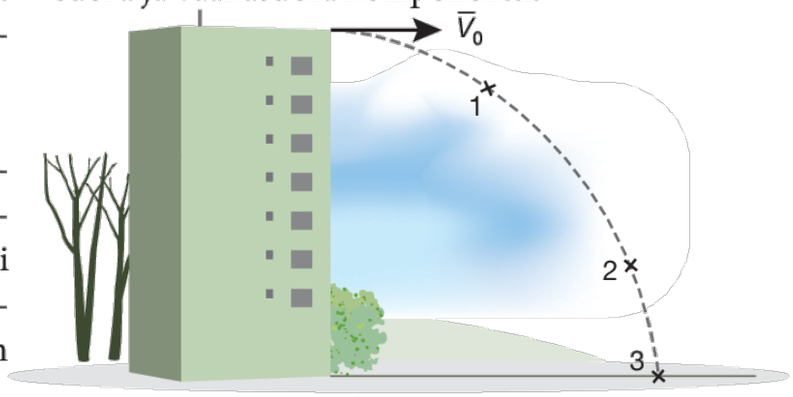
Pohdi ja etsi

6-9. Kivi
a) heitetään ylöspäin nopeudella 5,0 m/s
b) heitetään alaspäin nopeudella 5,0 m/s
c) pudotetaan ilman alkunopeutta.
Kuinka suuri on kiven kiihtyvyys eri tilanteissa?

6-10. a) Mitä putoavalle kappaleelle tapahtuu, kun kappaleeseen kohdistuva ilmanvastus on tullut kappaleeseen kohdistuvan painon suuruiseksi?
b) Miten golfpallon lentoradan kuvaaja (ks. s. 152) muuttuu, jos ilmanvastus otetaan huomioon?

6-11. Kun kappale putoaa, sen ilmanvastus kasvaa nopeuden lisääntyessä. Pallo heitetään vuoren jyrkänteeltä 120 metrin korkeudelta vinosti ylöspäin, ja se putoaa maahan. Mitkä ovat palloon vaikuttavat voimat eri hetkinä, kun pallo on
a) matkalla ylöspäin
b) ratansa ylimmässä pisteessä
c) matkalla alaspäin
d) alimmassa asennossa maassa?

6-12. Pieni pallo heitetään kerrostalon parvekkeelta. Pallon alkunopeus on piirroksessa, ja palloon kohdistuva ilmanvastus on pieni. Piirrä kohtiin 1, 2 ja 3 pallon nopeus sekä sen pystysuora ja vaakasuora komponentti.

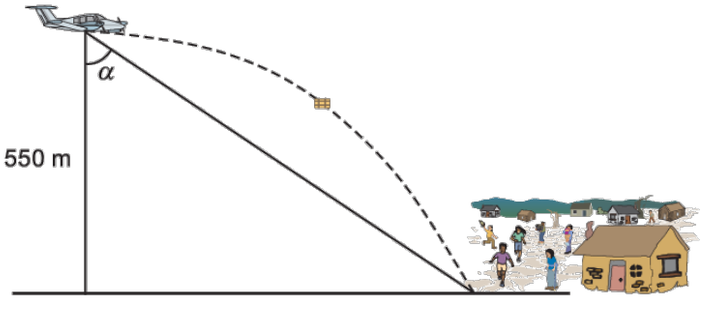


Tehtäviä

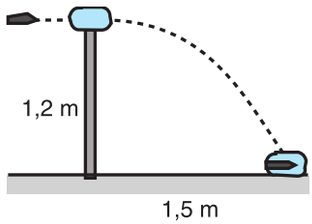
6-13. a) Kivi heitetään 15 m korkeasta tornista vaakasuoraan alkunopeudella 19 m/s. Kuinka kaukana tornin juuresta kivi kohtaa vaakasuoran maanpinnan?
b) Laske kiven nopeus sen osuessa maahan.
c) Samanaikaisesti vaakasuoraan heitetyn kiven kanssa tornista pudotetaan toinen samanlainen kivi. Laske pudotetun kiven nopeus sen osuessa maahan. Oletetaan kiviin kohdistuva ilmanvastus pieneksi.

6-14. Kivääriillä ammutaan vaakasuoraan suuntaan 220 m:n päässä olevaan maaliin. Luodin nopeus on 750 m/s. Kuinka paljon luoti putoaa tällä matkalla, jos ilmanvastusta ei oteta huomioon?

6-15. Avustuslentokone lähestyy kohdettaan. Lentokone lentää 550 m:n korkeudella vakionopeudella 198 km/h. Avustuspaketti halutaan pudottaa mahdollisimman lähelle kohdetta. Milloin ja kuinka monta metriä ennen kohdetta lentäjän tulee pudottaa paketti? Ratkaise, missä kulmassa lentäjä näkee kohteen tuolla hetkellä. Pakettiin kohdistuvaa ilmanvastusta ei huomioida.



6-16. Pienoiskiväärin luoti ammutaan vaakasuorasti 1,2 m korkean pylvään päällä olevaan puukappaleeseen. Kappale ja siihen jäänyt luoti lentävät 1,5 m:n etäisyydelle pylväästä. Luodin massa on 2,69 g ja puukappaleen 305 g.
a) Mikä on luodin nopeus törmäyshetkellä?
b) Kuinka monta prosenttia alkuperäisestä liike-energiasta muuttuu törmäyksessä muuhun muotoon?



6-17. Heität liikuntatunnilla koripallon nopeudella 4,2 m/s vinosti ylöspäin 62°:n kulmassa vaakatasoon nähden. Laske aika, jonka kuluttua koripallo saavuttaa lakikorkeuden.

6-18. Kuulantyöntäjä antaa kuulalle lähtönopeuden 13 m/s. Kuulan lähtökulma on 45°.
a) Laske kuulan nopeus 0,50 s:n kuluttua.
b) Piirrä ilmassa olevaan kuulaan vaikuttavat voimat.

6-19. Jalkapallo-ottelussa puolustaja potkaisee pallon suoraan ilmasta 1,0 metrin korkeudelta kentän pinnasta nopeudella 15 m/s 35°:n lähtökulmassa vaakatason suhteen. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.
a) Kuinka korkealla pallo käy?
b) Kuinka kaukana lähtöpisteestään pallo putoaa vaakasuoran kentän pinnalle?

6-20. Kivi heitetään vinosti ylöspäin siten, että sen alkunopeus on 24 m/s ja lähtökulma 55° vaakatasoon nähden. Kivi osuu maahan kohdassa, joka on samalla korkeudella lähtöpisteen kanssa. Määritä
a) kiven nopeus ($\overline{v}$) ja kiihtyvyys ($\overline{a}$) lakipisteessä
b) kiven tangenttikiihtyvyyden suurin arvo. [S2004, 6]

6-21. Pallo heitetään alkunopeudella 28 m/s
a) suoraan ylöspäin
b) 25°:n kulmassa vaakatasoon nähden.
Pallon massa on 0,145 kg. Määritä mekaanisen energian säilymislakia käyttäen, kuinka korkealle pallo ko. tapauksissa nousee. Ilmanvastusta ei tarvitse ottaa huomioon.

6-22. Pallo heitetään tornista 25°:n kulmassa vaakatasosta ylöspäin. Pallo osuu maahan 3,0 s:n kuluttua 30,0 m:n päässä tornista. Laske tornin korkeus. Palloon kohdistuva ilmanvastus oletetaan pieneksi.

6-23. Luoti ammutaan nopeudella 820 m/s vaakasuoraan 1,5 m korkean pylvään reunalla olevan lyijypallon keskipistettä kohti. Luoti uppoaa palloon, ja molemmat putoavat yhdessä vaakasuoran maan pinnalle. Luodin massa on 8,0 g ja lyijypallon 5,0 kg. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.
a) Laske lyijypallon nopeus sen osuessa maahan.
b) Kuinka kauas pylvään juuresta pallo putoaa?

Testaa, osaatko

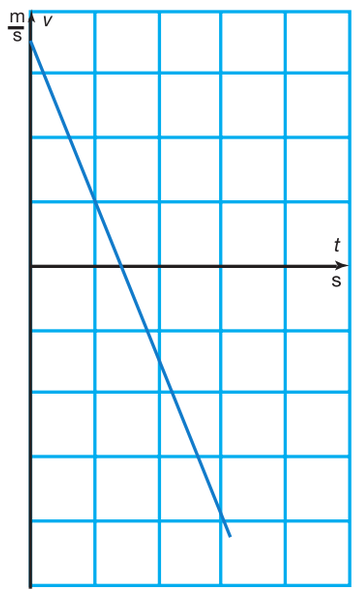
Oikeita vastausvaihtoehtoja voi olla yksi tai useampia.

1. Putoavan kappaleen nopeus riippuu
a) putoamisajasta
b) kappaleen kiihtyvyydestä
c) kappaleen alkunopeudesta.

2. Pieni kivi pudotetaan ilman alkunopeutta. Kolmen sekunnin kuluttua
a) kiven nopeus on noin 30 m/s
b) kivi on kiihtyvässä liikkeessä
c) kivi on pudonnut noin 44 m.

3. Parvekkeelta 45 m:n korkeudesta pudotetaan pieni kuula. Kuulan putoamisaika on
a) 2,1 s b) 4,5 s c) 3,0 s.

4. Kuva voi esittää
a) suoraan alas putoavan kappaleen liikettä
b) suoraan ylös heitetyn kappaleen liikettä
c) vinosti ylös heitetyn kappaleen liikettä.



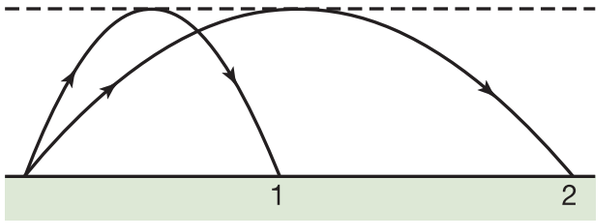
5. Jos ilmanvastusta ei oteta huomioon, suoraan ylöspäin heitetyn kiven kiihtyvyys on
a) suurin lakipisteessä
b) suurin juuri kädestä irtoamisen jälkeen
c) koko lennon ajan vakio.

6. Pallo heitetään ylöspäin alkunopeudella 10 m/s. Pallo voi saavuttaa korkeintaan
a) 1 metrin
b) 5 metrin
c) 10 metrin korkeuden.

7. Mäen päällä olevilla tykeillä ammutaan samanaikaisesti samanlaiset kuulat vaakasuoraan. Suuremman alkunopeuden saanut kuula lentää pitemmälle. Kun laukaisusta on kulunut 1,0 s
a) suuremman alkunopeuden saanut kuula on matalammalla
b) pienemmän alkunopeuden saanut kuula on matalammalla
c) kuulat ovat samalla korkeudella.

8. Vinon heittoliikkeen lakipisteessä kappaleen
a) $v_x = 0$ b) $v_y = 0$ c) $v = 0$.

9. Kuvassa on kahden jalkapallon lentorata. Pallon 1 lentoaika on
a) lyhyempi
b) sama
c) pidempi kuin pallon 2.



10. Edellisen tehtävän tilanteessa pallon 1 alkunopeus on
a) pienempi
b) sama
c) suurempi kuin pallon 2.

Tiivistelmä

- Putoamisliikkeen mallintamisessa voidaan käyttää tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhtälöitä

$$v = gt \text{ ja } y = \frac{1}{2}gt^2,$$

joissa kappaleen ajassa t putoama matka on y ja v on saavutettu nopeus. Suunta alas on positiivinen. Putoamiskiihtyvyyden g aiheuttaa gravitaatiovoima.

- Pystysuora ylös suuntautuva heittoliike:

$$v = v_0 - gt \quad \text{ja}$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Yhtälöissä v_0 on alkunopeus. Yhtälöt kuvaavat liikettä sekä nousun että putoamisen aikana. Suunta ylös on positiivinen.

- Vaakasuora heittoliike

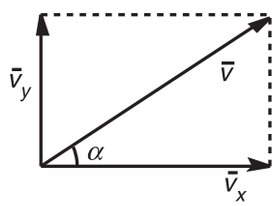
vaakasuora suunta liikkeen suunta positiivinen	**pystysuora suunta suunta alas positiivinen**
tasainen liike	tasaisesti kiihtyvä liike
kiihtyvyys a = nolla	kiihtyvyys a = vakio = g
nopeus v_x = vakio = v_{0x}	nopeus $v_y = gt$
paikka $x = v_{0x}t = v_x t$	paikka $y = \frac{1}{2}gt^2$

- Vino heittoliike

vaakasuora suunta liikkeen suunta positiivinen	**pystysuora suunta suunta ylös positiivinen**
tasainen liike	tasaisesti kiihtyvä liike
kiihtyvyys a = nolla	kiihtyvyys a = vakio = $-g$
nopeus v_x = vakio = v_{0x}	nopeus $v_y = v_{0y} - gt$
paikka $x = v_{0x}t = v_x t$	paikka $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

Nopeus hetkellä t on $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$, jossa v_x = vakio ja v_y ovat nopeuden komponentit. Nopeuden suuntakulma α saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt$$



Kertaustehtäviä

Etsi laskemalla yksi oikea vaihtoehto tehtävissä 1–10.

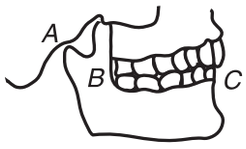
1. Keskipisteestään akseloitu levy lähtee pyörimään levosta vakiokulmakiihtyvyydellä 0,15 rad/s^2. Kiihdytys kestää 16 s. Levyn kiertokulma on
a) 2,4 rad b) 38 rad c) 19 rad.

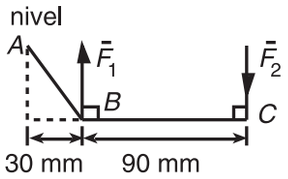
2. Kappaleen kulmanopeus ympyäradalla on 15 rad/s. Radan säde on 3,5 cm. Kappaleen ratanopeus on
a) 53 cm/s b) 5,3 m/s c) 53 m/s.

3. Heilurissa on 34 cm:n pitkän langan päässä pallo, jonka massa on 65 g. Pallo vedetään tasapainoasemasta sivuun ja päästetään heilahtelemaan. Kuinka suuri on langan jännitysvoima, kun pallo sivuuttaa tasapainoasemansa nopeudella 4,7 m/s:
a) 0,64 N b) 4,9 N c) 9,7 N?

4. Mika saa raskaan pankkiholvin oven liikkeelle työntämällä sitä ovenkahvasta 87 N:n voimalla. Kahva on 130 cm:n etäisyydellä saranoista. Kuinka suurella voimalla tätä ovea on työnnettävä, jos se halutaan saada liikkeelle ja sitä työnnetään 30 cm:n etäisyydeltä saranoista:
a) 20 N b) 87 N c) 380 N?

5. Kuvassa on yksinkertaistettu malli leukaluusta ABC. Leukaluu on nivelletty pisteestä A. Kun lihas pisteessä B kääntää leukaluuta kuvan osoittamaan suuntaan ($F_1 = 720$ N), niin mikä on etuhampaiden puristusvoiman suuruus F_2?
a) 240 N b) 360 N c) 180 N d) 720 N





6. Pöydällä olevassa metallisessa virvoitusjuomatölkissä on jäljellä 1,0 dl juomaa. Tölkin korkeus on 11 cm, massa 15 g ja pohjan halkaisija 7,0 cm. Millä korkeudella pöydän pinnasta on tölkin painopiste:
a) 1,3 cm b) 1,8 cm c) 5,5 cm?

7. Homogeeninen sylinteri pannaan vierimään ylös tasoa, jonka kaltevuuskulma on 25°. Sylinteri vierii liukumatta 1,2 m ennen pysähtymistään. Mikä on sylinterin alkunopeus? Sylinterin hitausmomentti akselin suhteen on $J = \frac{1}{2}mr^2$.
a) 6,2 m/s b) 3,5 m/s c) 2,6 m/s

8. Satelliitti kiertää Maata ympyäradalla 750 km:n korkeudella Maan pinnasta. Satelliitin nopeus on
a) 240 km/s b) 7,5 km/s c) 750 m/s.

9. Kivi heitetään pystysuoraan ilmaan. Kun kiven lähtönopeus on 20 m/s, sen nopeus on 0 m/s
a) 1,0 s:n b) 2,4 s:n c) 2,0 s:n
kuluttua.

10. Kappale heitetään alkunopeudella 27 m/s vinosti ylöspäin 36°:n lähtökulmassa. Kuinka pitkän ajan kuluttua kappale palaa takaisin lähtökorkeudelleen? Ilmanvastusta ei oteta huomioon.
a) 5,6 s b) 4,4 s c) 3,2 s

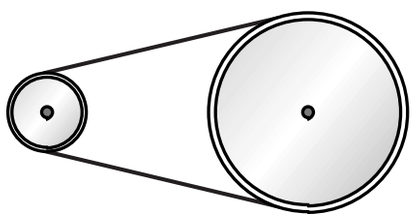
11. Ilmoita kiertokulma a) 175° radiaaneina b) 15 rad asteina.

12. Pulsarin pyörimisnopeus on 642 r/s. Laske pulsarin kierrosaika ja kulmanopeus.

13. Napakelkan aisan pituus (säde) on 4,5 m ja ratanopeus 2,5 m/s.
a) Kuinka suuri on napakelkan kierrosaika?
b) Kuinka suuri on napakelkan pyörimisnopeus?
c) Mitä kelkalle tapahtuu, jos se irtoaa aisasta? Perustele vastauksesi.

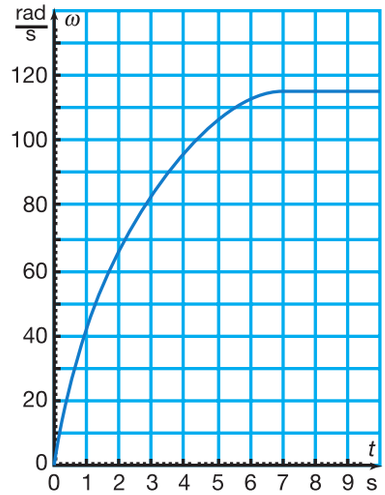
14. a) Rullasuksien pyörän halkaisija on 8,5 cm. Arvioi pyörän kierrosten lukumäärä, kun hiihtäjä tekee 10 km:n pituisen lenkin.
b) Pyöräilijän pyöräillessä vakionopeudella renkaan pyörimisnopeus on 2,5 r/s. Renkaan säde on 34 cm. Laske pyöräilijän kuuden minuutin aikana kulkema matka sekä renkaan kierrosten lukumäärä kyseisellä matkalla.

15. Kaksi kiekkoa on yhdistetty hihnalla toisiinsa kuvan mukaisesti. Kiekkojen halkaisijat ovat 40 cm ja 16 cm.
a) Mikä on kiekkojen kulmanopeuksien suhde niiden pyöriessä? Oletetaan, että hihna ei luista.
b) Isompi kiekko alkaa pyöriä lähtien levosta kulmakiihtyvyydellä 1,25 rad/s^2. Kuinka pitkän ajan kuluttua pienemmän kiekon pyörimisnopeus on 5,0 r/s?



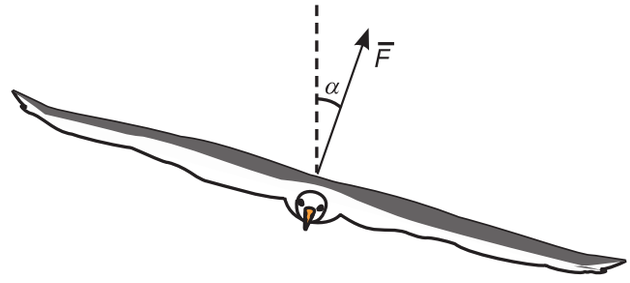
16. Akselin kulmanopeus muuttuu 2,4 sekunnissa tasaisesti arvosta 0,52 rad/s arvoon 4,3 rad/s.
a) Laske akselin kulmakiihtyvyys.
b) Kuinka monta astetta akseli ehtii tämän 2,4 s:n aikana kiertyä?

17. Kuva esittää pyörivän levyn kulmanopeutta (t, ω)-koordinaatistossa.
a) Määritä levyn keskikulmakiihtyvyys aikavälillä 0,0 s … 6,0 s.
b) Millä hetkellä levyn hetkellinen kulmakiihtyvyys on yhtä suuri kuin keskikulmakiihtyvyys aikavälillä 0,0 s … 6,0 s?



18. Ralliauto, jonka massa on 1050 kg, liikkuu vakiovauhdilla 110 km/h mutkassa, jonka kaarevuussäde on 53 m.
a) Kuinka suuri on auton kulmanopeus?
b) Kuinka suuri voima tarvitaan pitämään auto radallaan (tiellä)?
c) Mikä voima pitää auton radalla?
d) Onko autolla kiihtyvyyttä, kun auton ratavauhti on vakio?

19. Monet linnut liitelevät siipiään räpyttämättä nousevissa ilmavirroissa. Tällöin linnun siipiin kohdistuu niiden tasoa vastaan kohtisuora nostava voima. Kun naurulokki kiersi vaakatasossa ympyrärataa, jonka säde on 15 m, yhteen kierrokseen kului 16 s. Määritä nostovoima $\overline{F}$ ja kulma α (ks. kuva). Lokin massa oli 0,32 kg. [K2005, 6]



20. Suihkukone tekee pystytasossa ympyräsilmukan.
a) Esitä kuvioiden avulla lentäjään kohdistuvat voimat silmukan ylimmässä ja alimmassa pisteessä (kone on yläosassa ylösalaisin).
b) Koneen nopeus silmukan alimmassa pisteessä on 1500 km/h. Kuinka suuri pitää silmukan säteen vähintään olla, jos lentäjän ja istuimen välinen puristusvoima ei fysiologisista syistä saa ylittää arvoa $9G$ (G on lentäjään kohdistuva paino)? [K1998, 6]

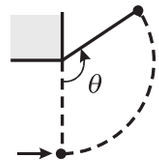
21. Autolla, jossa oli kuluneet renkaat, ajettiin kallistetussa ympyräkaarteessa, jonka säde on 240 m ja kallistuskulma 12,0°. Oletetaan autoon kohdistuvat vastusvoimat pieniksi. Kitkaa renkaiden ja tienpinnan välillä ei oteta huomioon. Mikä on suurin vauhti, jolla kaarteen voi ajaa tiellä pysyen?

22. Veturi jarruttaa kaarteessa, jonka kaarevuussäde on 540 m. Sen vauhti pienenee tasaisesti 95 km/h:stä 60 km/h:iin ajassa 11 s. Määritä veturin kiihtyvyys (suuruus ja suunta nopeusvektoriin nähden) jarrutuksen alku- ja loppuhetkellä. Piirrä kuvio, josta ilmenevät veturin em. nopeus- ja kiihtyvyysvektorit.

23. Vaakasuorassa olevan ympyrälevyn päällä on puupala 1,5 m:n etäisyydellä levyn keskipisteestä. Levy pääsee pyörimään sen keskipisteen kautta kulkevan akselin ympäri. Ympyrälevy lähtee levosta tasaisesti kiihtyvään ympyräliikkeeseen. Levyn kulmakiihtyvyys on 0,25 rad/s^2. Aluksi puupala pysyy paikallaan levyn päällä, mutta 6,5 sekunnin kuluttua se lähtee liukumaan levyllä. Mikä on levyn ja puupalan välinen kitkakerroin?

24. Esine lähtee levosta ylimmästä pisteestä pallon päältä ja liukuu kitkatta pallon pintaa alaspäin. Missä kohdassa esine irtoaa pallon pinnasta? Liikevastukset ovat pienet.

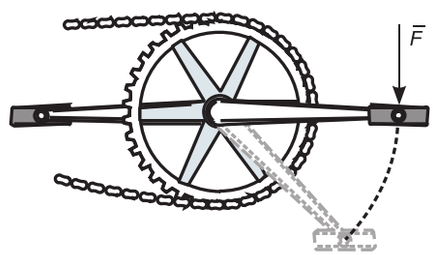
25. Metallipallo, jonka massa on 120 g, riippuu 85 cm:n pituisen langan päässä. Palloa isketään vaakasuoraan, jolloin se heilahtaa. Heilahduskulman θ saavuttaessa arvon 125° pallo alkaa poiketa ympyräradalta. Kuinka suuri oli pallon lähtönopeus? [S1999, 6]



26. Vaakasuoran sauvan AB, jonka pituus on 2,0 m, päihin on kiinnitetty kaksi kappaletta, joihin kohdistuvat painot ovat 55 N ja 35 N. Määritä painojen momentti pisteiden A ja B suhteen sekä voimien resultantti ja sen vaikutussuoran paikka. Sauvaan kohdistuvaa painoa ei oteta huomioon.

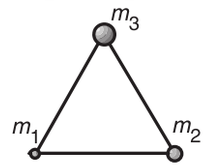
27. Leenan massa on 30 kg ja isän 80 kg. Leena istuu 6,0 m pitkän keinulaudan päässä. Lauta on tuettu keskipisteestään. Kuinka kauas Leenasta isän pitäisi laudalla asettua, jotta lauta pysyisi vaakasuorassa asennossa?

28. Polkupyörän polkimen etäisyys keskiön keskipisteestä on 17 cm. Poljinta painetaan 35 N:n voimalla suoraan alaspäin. Mikä on tämän voiman momentti, kun
a) poljin on vaakatasossa
b) polkimen asento on 45° vaakatasoon nähden?



29. Pasi työntää homogeenista puupölkkyä rakennustyömaalla portaalle, jonka korkeus on 7,7 cm. Laske pienin vaakasuora voima, jolla hänen täytyy työntää pölkyn painopisteen korkeudelta, jotta pölkky nousisi portaalle. Pölkyn halkaisija on 66 cm ja massa 144 kg. Oletetaan, että pölkky ei pääse liukumaan.

30. a) Kartiomainen karttakeppi katkeaa painopisteensä kohdalta. Mitä tiedät osien massoista?
b) Kolme kuulaa on sijoitettu kuvan mukaisesti tasasivuisen kolmion kärkiin. Määritä painopisteen paikka, kun $m_1 = 1{,}2$ kg, $m_2 = 2{,}5$ kg ja $m_3 = 3{,}45$ kg. Kolmion sivun pituus on 140 cm.

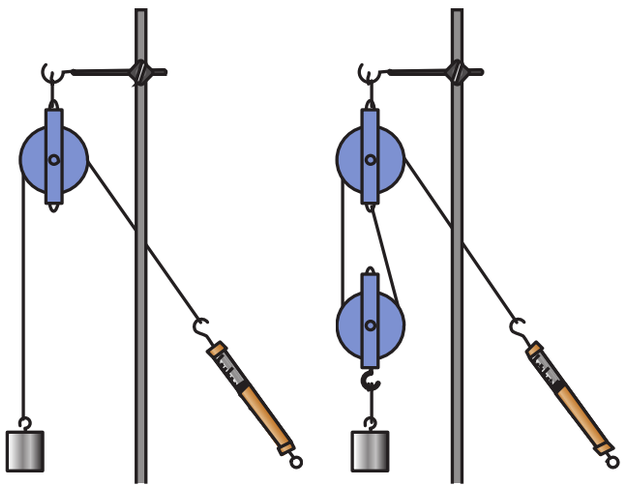


31. a) Selvitä, kuinka määrittäisit kappaleen painopisteen paikan luotilangan avulla.
b) Kolmesta tasapaksusta 4,0 m pitkästä putkesta valmistetaan lipputanko. Alhaalta lukien osien massat ovat 8,7 kg, 7,3 kg ja 5,9 kg. Missä on lipputangon painopiste?

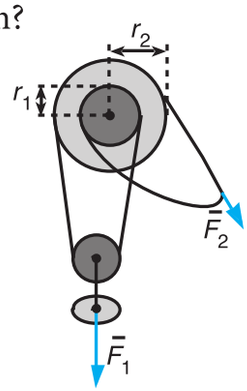
32. Suoran ympyrälieriön muotoinen öljysäiliö on täynnä öljyä. Säiliö seisoo pohjallaan kaltevalla tasolla. Säiliön pohjan halkaisija on 0,40 m, ja säiliön korkeus on 1,3 m. Kuinka suuri voi enintään olla sen kaltevan tason kaltevuuskulma, jolle asetettuna säiliö pysyy pystyssä?

33. Oheisissa kuvissa pyörään kohdistuvan painon suuruus on $G_{\text{pyörä}} = 0{,}2$ N ja punnukseen kohdistuvan painon suuruus $G_{\text{punnus}} = 1{,}5$ N. Mitä vaaka näyttää kuvissa a ja b?

a) b)

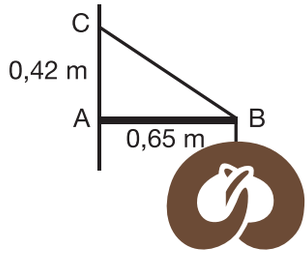


34. a) Differentiaalitaljassa ylemmät ketjupyörät on lukittu toisiinsa ja alempi pyörä on liikkuva. Ketjupyörissä liikkuva päättymätön ketju ei pääse luistamaan. Johda differentiaalitaljan tasapainoehto $F_2 = \dfrac{r_2 - r_1}{2r_2} F_1$. Ohje: Valitse siirtymät siten, että ylempi pyörä pyörähtää täyden kierroksen. Pohdi, miten pyörien säteiden ero vaikuttaa voiman $\vec{F}_2$ arvoon tasapainotilanteessa, jos voima $\vec{F}_1$ pysyy vakiona.
b) Kuinka suuren kuorman $\vec{F}_1$ differentiaalitaljalla voi nostaa, kun kuormaa nostettaessa vedetään 850 N:n voimalla ja pyörien säteet ovat 15 cm ja 22 cm?



35. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perustele vastauksesi.
a) Kappale on tasapainossa, jos siihen vaikuttava kokonaisvoima on nolla.
b) Kappale ei pyöri, jos siihen vaikuttavien momenttien summa on nolla.

36. Leipuriliikkeen mainoskyltti, jonka massa on 5,2 kg, on ripustettu oheisen kuvan mukaisesti seinälle. Kuinka suuri on kevyeen tukivaijeriin BC kohdistuva jännitysvoima? Kuinka suuren ja minkä suuntaisen voiman tukitanko AB kohdistaa seinään? Tukitangon AB massa on 1,2 kg. [S2008, 6]

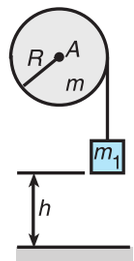


37. Sauva pyörii keskipisteen kautta kohtisuorasti kulkevan akselin ympäri.
a) Kuinka pitkä sauvan on oltava, jotta sen hitausmomentti olisi 1,2 kgm^2, kun sauvan massa on 0,250 kg?
b) Muuttuuko sauvan hitausmomentti, jos pyörimisakselin paikkaa vaihdetaan?
c) Mitä suure hitausmomentti kuvaa?

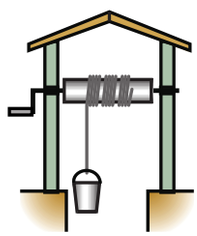
38. Homogeeninen sauva pääsee pyörimään pystytasossa vapaasti toisen pään kautta kulkevan kiinteän akselin ympäri. Sauva poikkeutetaan 90° tasapainoasemastaan ja päästetään irti ilman alkunopeutta. Laske sauvan vapaan pään nopeus, kun sauva sivuuttaa tasapainoasemansa. Sauvan pituus on 0,52 m. Sauvan hitausmomentti pään kautta kulkevan, sauvaa vastaan kohtisuoran akselin suhteen on $J = \frac{1}{3}ml^2$.

39. Sylinterimäisen putkenpätkän massa on 2,5 kg ja säde 1,2 cm. Putken ympäri kierretystä narusta vedetään vakiona pysyvällä 42 N:n suuruisella voimalla putken tangentin suuntaisesti. Laske putken kulmakiihtyvyys.

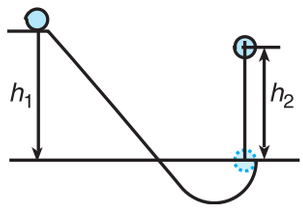
40. Sylinteri pääsee kiertymään lähes kitkattomasti vaakasuoran kiinteän akselin ympäri. Kappale on nostettu sylinterin ympäri kierretyn vaijerin varassa 1,7 m:n korkeudelle lattiasta (kuvio). Systeemi lähtee levosta liikkeelle. Kuinka suurella nopeudella kappale törmää lattiaan? Sylinterin massa on 75 kg ja kappaleen massa 120 kg. Sylinterin hitausmomentti on $J_A = \frac{1}{2}mR^2$.



41. Vesiämpäri, jonka massa oli 12 kg, nostettiin kaivosta kiertämällä kammella puutukkia, jonka ympärille kevyt nostoköysi kiertyi (kuva). Puutukin halkaisija oli 18 cm ja tukin ja kammen kokonaishitausmomentti 0,028 kgm^2. Kesken noston käden ote lipesi ja ämpäri alkoi pudota kaivoon, jolloin tukin pyörimistä jarrutti kitkamomentti 1,4 Nm. Kuinka suuri oli ämpärin nopeus, kun ämpäri oli pudonnut 3,2 m? [S2000, 6]



42. Teräspallo lähtee levosta ja vierii liukumatta pitkin kaltevaa pintaa, joka loppupäässä kaartuu kuvan mukaisesti pystysuoraksi nousuksi. Lähtökohdan ja pallon lentoonlähtökohdan korkeusero h_1 on 0,95 m. Kuinka korkealle (h_2) pallo nousee? [S1996, 7]



43. a) Kahden auton painopisteiden välinen etäisyys on 2,5 m. Autojen massat ovat 1200 kg ja 1600 kg. Laske niiden välinen gravitaatiovoima.
b) Mikä on sellaisen satelliitin nopeus, joka kiertää Maata Maan säteen R etäisyydellä Maan pinnasta?

44. Maan sideerinen (mitattu) kiertoaika Auringon ympäri on 1,0000 a ja Pluton 246,8 a. Maan keskietäisyys Auringosta on $149{,}6 \cdot 10^6$ km. Laske näiden tietojen avulla Pluton keskietäisyys Auringosta.

45. Reittilentokone lentää päiväntasaajan yläpuolella 12,0 km:n korkeudella maanpinnasta. Laske Maan gravitaatiokentän voimakkuus tällä korkeudella.

46. Marsin keskinopeus radallaan Auringon ympäri on 24,13 km/s. Määritä Auringon massa, kun Marsin radan oletetaan olevan ympyrärata, jonka säde on $227{,}9 \cdot 10^6$ km.

47. Putoamiskiihtyvyys Maan pinnalla on 9,81 m/s^2. Toisen planeetan massa on 100 kertaa Maan massa ja säde 10 kertaa Maan säde. Laske putoamiskiihtyvyys tämän planeetan pinnalla.

48. Kerrostalon parvekkeelta 35 metrin korkeudelta pudotetaan tennispallo. Laske tennispallon nopeus sen osuessa pihalle. Kuinka kauan putoaminen kestää? Ilmanvastusta ei oteta huomioon.

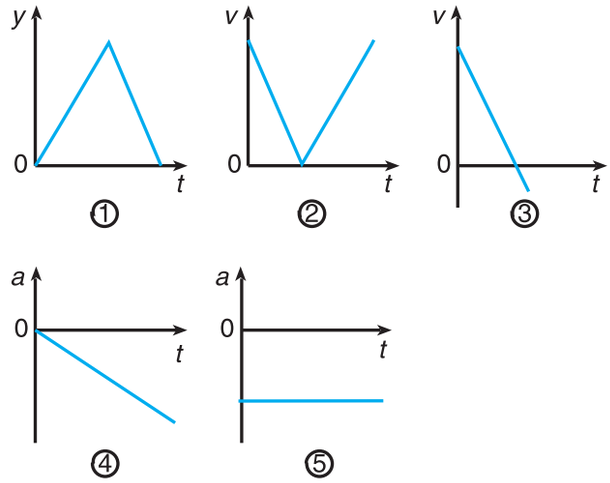
49. Laskuvarjohyppääjä putoaa vapaasti 120 m ennen varjon aukeamista. Tämän jälkeen liike muuttuu hidastuvaksi ($a = -2{,}0$ m/s^2). Kun hyppääjä putoaa nopeudella 5,0 m/s, liike muuttuu tasaiseksi. Miltä korkeudelta vähintään on hypättävä, jotta nopeudeksi tulee juuri ennen maahantuloa 5,0 m/s?

50. Elina heittää pallon tornista suoraan alas nopeudella 15 m/s. Pallo törmää maanpintaan 114 m alempana.
a) Milloin pallo osuu maahan?
b) Laske pallon nopeus sen törmätessä maahan.

51. Ansa seisoo rotkon reunalla ja heittää kiven pystysuoraan ylöspäin alkunopeudella 18 m/s. Kivi putoaa rotkoon. Millä nopeudella ja kuinka pitkän ajan kuluttua kivi kohtaa 49 m lähtötasonsa alapuolella olevan rotkon pohjan?

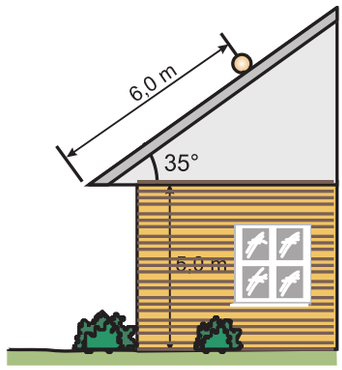
52. Kivi heitetään rantatörmältä vaakasuoraan suuntaan alkunopeudella 22 m/s. Kuinka kaukana ja millä nopeudella kivi kohtaa 32 m lähtötason alapuolella olevan veden pinnan?

53. a) Mitkä seuraavista paikan, nopeuden ja kiihtyvyyden kuvaajista voivat esittää pystysuoraan ylöspäin heitetyn kappaleen liikettä ja mitkä eivät?



b) Piirrä ja nimeä alleviivattuihin kappaleisiin vaikuttavat voimat:
1) kivi, joka putoaa vedessä kohti järvenpohjaa
2) henkilö, joka pysyy vakiokulmanopeudella pyörivän karusellisylinterin seinämällä, vaikka sylinterin pohja on laskettu alas.
Kiinnitä huomiota voimien keskinäiseen suuruuteen.

54. Umpinainen sylinteri, jonka säde on 18 cm ja massa 12 kg, lähtee levosta vierimään katolta alas. Sylinteri vierii 6,0 m:n matkan katolla, jonka kaltevuuskulma on 35°, ja putoaa tämän jälkeen maahan.



a) Mikä on sylinterin kulmanopeus, kun se saavuttaa katon reunan?
b) Katon reuna on 5,0 m:n korkeudella. Kuinka kaukana reunasta sylinteri osuu maahan?

Vastauksia

1-1. 1800°, 31 rad
1-2. Ensimmäinen rivi: 30; 0,52; 0,083; 0,052
Toinen rivi: 57; 1,0; 0,16; 0,10
Kolmas rivi: 1260; 22; 3,5; 2,2
Neljäs rivi: 1100; 20; 3,2; 2,0
1-3. 210
1-4. a) 24 m b) 12 m
1-5. a) 0,093 r/s b) 70 rad
1-6. 0,90 r/s, 1,1 s
1-7. a) 358 b) 21,1 r/s
1-8. a) A 13 rad/s b) A 1,4 s ja B 3,8 s
1-9. 2,4 rad/s
1-10. a) 0,14 r/s b) 0,90 rad/s
1-11. a) pienenee 0,05 s b) suurenee 200 rad/s
1-12. a) $1{,}16 \cdot 10^{-5}$ r/s b) $7{,}29 \cdot 10^{-5}$ rad/s
1-13. 6900 rad
1-14. 11 s
1-15.a) 200 rad b) 5,4 s c) 45 rad/s, 88 rad/s
1-16. c) –110 rad/s^2
1-17. 2, 3 ja 4
1-18. b) 30,0 s … 35,0 s d) 2000 rad
1-19. b) 2,1 rad/s^2, –3,1 rad/s^2
c) –2,6 rad/s^2 d) 52 rad
1-20. 6,5 rad/s
1-21. a) 0,025 s b) 250 rad/s c) 63 rad/s^2
1-22. a) –1,2 rad/s^2 b) 16
1-23. a) –13 rad/s^2 b) 61
1-24. 450
1-25. a) 5,0 s ja 10,0 s c) 18

Testaa, osaatko s. 27
1. a b **2.** c **3.** b c **4.** a b c **5.** a **6.** a
7. c **8.** a c **9.** b c

2-1. a) A b) molemmilla sama
2-2. a) Sekuntiviisarin b) 1) 60 s 2) 0,017 r/s
3) 0,10 rad/s 4) 0,016 m/s, 1400 m
2-3. a) 25 m/s
2-4. a) 6,0 m/s b) 6,0 m/s c) 32 r/s
2-5. a) 6,7 m/s^2, 50° b) 8,7 kN
2-6. a) 1,4 kN b) pysyy
2-7. a) 62 N
2-8. a) $9{,}00 \cdot 10^{22}$ m/s^2 b) $6{,}57 \cdot 10^{15}$
2-9. 0,55 r/s
2-10. 15 m/s
2-11. b) 2,9 m/s
2-12. a) 30 km/h b) 2,4 km
2-13. b) 16 cm/s c) –10 cm/s, myötäpäivään
2-14. a) 0,11 b) 5,2 m
2-19. uloin
2-20. a) 53 rad/s, 8,5 r/s b) 0,86 m/s^2
2-21. a) 72 s b) 1400 c) 25 m/s
2-22. a) 1,2 rad/s^2 b) 0,10 m/s
c) 0,20 m/s^2, 20°
2-23. a) –2,0 rad/s^2 b) 1,3 m/s^2, –27°
2-24. 76 km/h
2-25. 1,4 kN
2-26. b) 1,7 kN
2-28. 3,5 m/s
2-29. a) 25 cm b) 0,74 N
2-31. a) 0,93 m/s^2 b) 0,93 m/s^2 c) 6,6 m/s^2
2-32. 1,8 m/s^2, 113°
2-34. a) 5,8 N b) 8,4 m/s^2, 8,0 m/s^2

Testaa, osaatko s. 51
1. a b c **2.** a b c **3.** a b c **4.** b c **5.** a b c
6. a **7.** a b c **8.** b **9.**a c **10.** c

3-2. a) –0,44 Nm b) –1,5 Nm
3-3. 540 N
3-4. 1300 kg
3-5. 5,0 kg
3-6. 1,9 m Liisan puoleisesta lankun päästä lukien
3-7. 740 N
3-9. a) 3 b) harjaosa
3-14. symmetria-akselilla 6,7 cm:n etäisyydellä vasemmasta päästä
3-15. (1,1 m; 1,3 m)
3-16. (8,3 cm; 6,5 cm; 1,4 cm), kun origo on kappaleen vasemmassa alakulmassa

3-17. b) (0,13 m, 0,10 m), kun origo on vasemmassa alakulmassa
3-18. (1,7 cm; 2,0 cm)
3-19. a) 0,93 Å Br-ytimen paikasta kohti K-ydintä b) (0,040 Å; 0,052 Å), kun O-ydin on origossa
3-20. 27°
3-21. 7,0-kertainen
3-22. a) 3300 N b) 84 N
3-23. a) 160 N b) 230 N
3-24. a) 43 cm:n päähän rautakangen kärjestä b) 34 cm:n päähän rautakangen kärjestä
3-25. 9,3 N
3-26. a) 120 N b) 0,60 m c) 74 J d) 74 J
3-27. 460 N, 920 N
3-28. 7,2 kg
3-29. a) 280 N ylöspäin b) 5900 N ylöspäin
3-30. 0,88 m
3-31 6,0 m
3-32. 300 N
3-33. a) 380 N b) 860 N, 63° yläviistoon oikealle
3-34. 810 N
3-35. a) 800 N
3-36. a) 19 N b) 19 N, −145° positiivisen x-akselin suhteen c) 0,70
3-37. vähintään 0,45

Testaa, osaatko s.79
1. a b c **2.** b c **3.** c **4.** b **5.** a c **6.** a b **7.** b c **8.** a

4-6. a) 0,023 kgm^2
4-7. a) 170 rad/s^2 b) 15 s
4-8. a) 0,017 kgm^2 b) 2,4 mJ
4-9. a) 0,0031 kgm^2 b) 0,015 kgm^2 c) 0,043 kgm^2
4-10. a) 1,3 rad/s^2 b) 0,23 J
4-11. 12 rad/s^2
4-12. 19,5 cm
4-13. 3,9 m/s^2
4-14. −5,1 Nm
4-15. 1,6 m/s
4-16. a) 12 kJ b) 0,28
4-18. $0{,}76 \cdot 10^{-3}$ kgm^2
4-23. 43 r/min, 1,6 kJ
4-24. a) 1,5 m b) 0,93 rad/s c) 98 J d) 8,4 rad/s, 880 J
4-30. Kyllä
4-31. 250 J
4-32. 5,4 m/s
4-33. b) 3,0 m/s (2,7 m/s)
4-34. 4,1 mJ
4-35. Ei
4-36. a) 4,1 m/s b) 4,7 m/s
4-38. 1,3 r/s
4-39. a) 3,5 m/s^2, 120 rad/s^2 d) 0,00018 kgm^2 e) umpinainen pallo

Testaa, osaatko s. 115
1. c **2.** b **3.** c **4.** b **5.** a c **6.** b **7.** b c **8.** c **9.** a b c **10.** a

5-3. b) 9,783 m/s^2
5-8. a) 1, 3 b) 1 ja 3
5-9. b) 69200 km/h
5-10. 8 d
5-11. $2871 \cdot 10^6$ km
5-13. a) 9,79 m/s^2 b) 9,78 m/s^2 c) 0,87 m/s^2
5-14. a) $5{,}93 \cdot 10^{-3}$ m/s^2 b) $2{,}73 \cdot 10^{-3}$ m/s^2
5-15. $1{,}988 \cdot 10^{30}$ kg
5-16. a) 1,018 km/s b) 27,45 d
5-17. 1 h 36 min, 8,21 m/s^2
5-18. 35 790 km
5-19. $6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg
5-20. a) $1{,}3 \cdot 10^{12}$ m/s^2 b) 0,60 ms
5-21. b) 1,8 m/s^2
5-22. 346 000 km

Testaa, osaatko s. 137
1. a c **2.** a b c **3.** b c **4.** a b c **5.** a b c
6. a **7.** a **8.** a **9.** b **10.** a

6-1. 0,25 s
6-2. b) 3,0 s c) 3,2 s
6-3. 33 m
6-4. a) 2,0 m b) 0,4 m lähtötason alapuolella c) 0,75 s d) $-2{,}9$ m/s e) 10 m/s^2
6-5. 15 m
6-6. c) 8,2 m/s^2
6-7. b) 0,9 m, 2,5 m
6-8. a) 2,6 s b) 41 m/s
6-13. a) 33 m b) 26 m/s, $-42°$ c) 17 m/s
6-14. 0,42 m
6-15. 11 s, 580 m, 47°
6-16. a) 350 m/s b) 99 %
6-17. 0,38 s
6-18. a) 10 m/s, 25°
6-19. a) 4,8 m b) 23 m
6-20. a) $\vec{v} = 14 \text{ m/s } \vec{i}$, $\vec{a} = -9{,}81 \text{ m/s}^2 \ \vec{j}$
b) 8,0 m/s^2
6-21. a) 40 m b) 7,1 m
6-22. 30 m
6-23. a) 5,6 m/s, 76° b) 0,72 m

Testaa, osaatko s. 156
1. a b c **2.** a b c **3.** c **4.** b **5.** c **6.** b
7. c **8.** b **9.** b **10.** a

Kertaustehtävät
1. c **2.** a **3.** b
4. c **5.** c **6.** b
7. c **8.** b **9.** c
10. c
11. a) 3,1 rad b) 860°
12. a) 1,56 ms, 4030 rad/s
13. a) 11 s b) 0,088 r/s
14. a) 37000 b) 1,9 km, 900
15. a) 5:2 b) 10 s
16. a) 1,6 rad/s^2 b) 330°
17. a) 19 rad/s^2 b) 2,0 s
18. a) 0,58 rad/s b) 18 kN
c) lepokitka d) on
19. 3,2 N, 13°
20. b) 2,2 km
21. 22 m/s
22. 1,6 m/s^2, 120° ja 1,0 m/s^2, 150°
23. 0,41
24. 1,67r
25. 5,6 m/s
26. -70 Nm, 110 Nm, $R = 90$ N, 0,78 m
27. 4,1 m
28. a) $-6{,}0$ Nm b) $-4{,}2$ Nm
29. 1200 N
30. b) (83 cm, 59 cm)
31. b) 5,5 m
32. 17°
33. 1,5 N, 0,85 N
34. b) 5,3 kN
35. a) väärin b) väärin
36. 100 N, 3,8°
37. a) 7,6 m b) muuttuu
38. 3,9 m/s
39. 2800 rad/s^2
40. 5,0 m/s
41. 6,5 m/s
42. 0,68 m
43. a) $2{,}0 \cdot 10^{-5}$ N b) 5,6 km/s
44. $5886 \cdot 10^6$ km
45. 9,762 m/s^2
46. $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg
47. 9,8 m/s^2
48. 26 m/s, 2,7 s
49. 700 m
50. a) 3,5 s b) 50 m/s
51. 36 m/s, 5,5 s
52. 56 m, 33 m/s, $-49°$
54. a) 37 rad/s b) 3,8 m

Hakemisto

epämääräinen 65

gravitaatio 118
gravitaatiokenttä 124
gravitaatiokentän voimakkuus 126
gravitaatiolaki 122
gravitaation potentiaalienergia 130
gravitaatiovakio 122
gravitaatiovoima 121

heittoliike 143, 147, 150
hitausmomentti 84, 85, 89, 91
horjuva 65

indifferentti 65

jäykkä kappale 10, 73

kalteva taso 69
kantama 151
Kepler, Johannes 119
keplerin lait 119
keskeisvoima 121
keskikulmakiihtyvyys 21
keskikulmanopeus 15
kiertoakseli 55
kiertokulma 12, 23
kiertymä 12
kiihtyvyys 41
kokonaishitausmomentti 91
kulmakiihtyvyys 21
kulmanopeus 15, 23

labiili 65
lakipiste 143

massakeskipiste 63, 123
mekaaninen kone 68
momentti 56
muuttuva ympyräliike 40

normaalikiihtyvyys 33

paino 125
painopiste 61
pakonopeus 132
putoaminen 141
putoamiskiihtyvyys 125
putoamisliike 86, 141
pystysuora heittoliike 143
pyöriminen 8, 10
pyörimisakseli 10
pyörimisliike 10, 95
pyörimisliikkeen energia 89
pyörimismäärä 100
pyörimisnopeus 11

radiaani 13
ratanopeus 32
rotaatioenergia 88

stabiili 65
statiikka 54

talja 70
tangenttikiihtyvyys 40
tasainen pyörimisliike 16
tasainen ympyräliike 33
tasapaino 57, 73
tasapainolajit 65
tukipinta 66
työ 95

vaakasuora heittoliike 147
vakaa 65
vieriminen 105
vierimisehto 106
vierimisvastus 111
vino heittoliike 150
vintturi 71
vipu 68
voiman momentti 56
voiman varsi 56
väkipyörä 70

ympyräliike 30

Valokuvat

s. 7	ScandinavianStockPhoto
s. 8vas. ylh.	iStockphoto
s. 8 oik. ylh.	iStockphoto
s. 8 alh.	iStockphoto
s. 9 ylh.	iStockphoto
s. 9 alh.	iStockphoto
s. 10 vas.	iStockphoto
s. 10 oik.	iStockphoto
s. 11 ylh.	Sampsa Kaijaluoto
s. 11 alh.	iStockphoto
s. 12	iStockphoto
s. 13	iStockphoto
s. 14	iStockphoto
s. 15	Sampsa Kaijaluoto
s. 16	iStockphoto
s. 18	Jere Keskiaho
s. 19	SKOY/SPL
s. 20	IS-VET
s. 24	iStockphoto
s. 29	iStockphoto
s. 30 vas. ylh.	iStockphoto
s. 30 oik. ylh.	iStockphoto
s. 30 alh.	iStockphoto
s. 31vas. ylh.	iStockphoto
s. 31 oik. ylh.	iStockphoto
s. 31 alh.	Sampsa Kaijaluoto
s. 32	iStockphoto
s. 33	Arsi Ikäheimonen
s. 35	iStockphoto
s. 55	Sampsa Kaijaluoto
s.40 vas.	iStockphoto
s. 40 oik.	Lehtikuva/Reuters
s. 44	iStockphoto
s. 45	Arsi Ikäheimonen
s. 46	iStockphoto
s. 47 vas. ylh.	Sampsa Kaijaluoto
s. 47 oik. ylh.	Sampsa Kaijaluoto
s. 47 alh.	iStockphoto
s. 48	Arsi Ikäheimonen
s. 53	iStockphoto
s. 54 vas. ylh.	iStockphoto
s. 54 oik. ylh.	iStockphoto
s. 54 alh.	iStockphoto
s. 55vas. ylh.	iStockphoto
s. 55 oik. ylh.	Lehtikuva/AP
s. 55 alh.	Sampsa Kaijaluoto
s. 57	Rodeo.fi
s. 59	iStockphoto
s. 61 vas. ylh.	iStockphoto
s. 61 oik. ylh.	iStockphoto
s. 61 alh.	Arsi Ikäheimonen
s. 63 vas.	Samspa Kaijaluoto
s. 63 kesk.	iStockphoto
s. 63 oik.	Lehtikuva/Scanpix Denmark
s. 65 vas. ylh.	iStockphoto
s. 65 kesk. ylh.	iStockphoto
s. 65 oik. ylh.	iStockphoto
s.65 alh.	Sampsa Kaijaluoto
s. 66	iStockphoto
s. 68 vas.	iStockphoto
s. 68 kesk.	iStockphoto
s. 68 oik.	iStockphoto
s. 69	Sampsa Kaijaluoto
s. 73	LKA/Timo Nieminen
s. 81	iStockphoto
s. 82 vas ylh.	iStockphoto
s. 82 oik. ylh.	iStockphoto
s. 82 alh.	iStockphoto
s. 83 vas.	Arsi Ikäheimonen
s. 83 oik.	Arsi Ikäheimonen
s. 84	IS-VET
s. 86	iStockphoto
s. 88	Arsi Ikäheimonen
s. 90	Arsi Ikäheimonen
s. 92 ylh.	iStockphoto
s. 92 alh.	iStockphoto
s. 93	iStockphoto
s. 94	Sampsa Kaijaluoto
s. 95	iStockphoto
s. 96	iStockphoto
s. 99 vas.	iStockphoto
s. 99 oik.	iStockphoto
s. 100 vas.	Arsi Ikäheimonen
s. 100 oik.	Arsi Ikäheimonen
s. 101 vas.	iStockphoto
s. 101 oik.	iStockphoto
s. 102	SKOY/SPL/NASA
s. 103 ylh.	Lehtikuva/AFP
s. 103 alh.	Sampsa Kaijaluoto
s. 105 vas. ylh.	iStockphoto
s. 105 oik. ylh.	iStockphoto
s. 105 alh.	Arsi Ikäheimonen
s. 106	Lehtikuva
s. 108	Lehtikuva
s. 110	iStockphoto
s. 111 vas.	Raimo Havukainen
s. 111 oik.	Raimo Havukainen
s. 112	Lehtikuva
s. 117	iStockphoto
s. 118 vas.	iStockphoto
s. 118 oik.	iStockphoto
s. 119 vas.	iStockphoto
s. 119 oik.	iStockphoto
s. 120	Nasa
s. 121	SKOY/SPL
s. 124	SKOY/SPL/NASA
s. 125	SKOY/SPL
s. 126 vas.	SKOY/SPL
s. 126 oik.	SKOY/SPL/NASA
s. 127	iStockphoto
s. 128	iStockphoto
s. 129	SKOY/SPL
s. 131	NASA
s. 132 ylh.	iStockphoto
s. 132 alh.	SKOY/SPL
s. 133	Lehtikuva
s. 134	SKOY/SPL
s. 136	SKOY/SPL